浙江师范大学

硕士学位论文

直接微扰方法和非线性薛定谔方程族的近似解

姓名：程雪苹

申请学位级别：硕士

专业：理论物理

指导教师：林机

20061201

直接微扰方法和非线性薛定谔方程族的近似解

摘　要

孤子理论是非线性科学中一个十分重要的分支，它在物理学和其它的许多领域中有着越来越广泛的应用。而微扰理论作为孤子理论中的一个重要方面，关于它的研究也日益引起人们的关注。到目前为止，人们已经发展了多种有效的微扰方法，它们大体可分为两大类：一类是逆散射微扰方法。它能成功地处理各种复杂的微扰问题，在理论上有着重要的学术价值，但其思路较迂回曲折，数学计算繁琐。另一种是直接微扰方法。它的最常用的系统方法是将孤子方程线性化后再按 Jost 函数的平方作微扰展开。由于 Jost 解是逆散射变换 (IST) 过程中所出现的一种特解，所以这种微扰方法并没有完全脱离对 IST 的依赖，与其仍有或多或少的关联。而且关于直接微扰法的含时、空的偏微分算子的本征函数系，前人并没有找到直接求解它的方法，都是利用它与 IST 间的某种联系来求得的。最近，楼在前人的基础上发展了一种新的直接微扰方法，它完全摆脱了对 IST 的依赖，思路和计算较为简便。而且利用这种直接微扰方法得到的微扰解比用其他微扰方法得到的解要丰富得多。

本文就楼的直接微扰方法作了较为全面、系统的研究，主要工作内容如下：1. 从可积的非线性薛定谔方程入手，将利用直接微扰方法得到的近似解与其精确解进行了对比、分析，验证

了直接微扰方法的可靠性。微扰小参量 ϵ 越小，相应的近似解与精确解越符合，此时，直接微扰方法给出的微扰方程的近似解也就越可靠。2. 以不同的微扰非线性薛定谔方程为实际例子，例如，耦合非线性薛定谔方程、(2+1) 维非线性薛定谔方程，来阐述直接微扰方法的具体运用和适用性。通常，针对微扰非线性薛定谔方程的不同形式的解需要采用不同的微扰方法对其进行分别处理，但是，从本文的求解过程中发现，采用楼的直接微扰方法可以得到多种不同形式的微扰解。而且微扰方程的零阶解可以为无微扰非线性薛定谔方程的任意一个精确解，它们的一阶修正则可以是无微扰方程的无穷多个对称的任意一个。借助符号处理软件 Matlab，我们还实现了受线性损耗影响的耦合非线性薛定谔方程的数值模拟，结果表明，在 ϵ 值的较大范围内，近似的解析解与数值解吻合得非常好。另一方面，非线性薛定谔方程族的近似求解的实现也为楼所发展的直接微扰方法提供了几个重要的实例，使直接微扰方法得到进一步的完善和充实。3. 基于直接微扰方法给出的可靠的近似解，我们还给出在微扰作用下孤子的各个参数的解析表达式。无论是对于单孤子还是多孤子，在线性损耗的作用下，它们的振幅和能量都将随着时间的增加而指数衰减直至零。不过，微扰的影响并不会改变孤子的传输速度。特别地，对于多孤子，孤子的碰撞性质也不会受微扰影响而发生改变。也就是说，原来等幅传输的弹性碰撞的两孤子在碰撞后仍然保持以相等的振幅传输，它们之间也不发生能量的转移和交换。

关键词：直接微扰方法，非线性薛定谔方程，微扰，孤子解

THE DIRECT PERTURBATION METHOD AND APPROXIMATE SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION HIERARCHY

ABSTRACT

Soliton theory is one of the important branches of nonlinear science. It has crescent application in many fields. And perturbation theory is one of the important parts of soliton theory. So the study of perturbation theory has been increasingly received extensive attention of many researchers. So far, many effective perturbation methods have been established, they can be roughly divided into two kinds. One is the inverse scattering perturbation method, which has important academic value. But this technique is inconvenient to those who are not familiar with the inverse scattering transformation(IST). The other is the direct perturbation method where the squared Jost solutions are employed as the basis for perturbation expansion after soliton equations have been linearized. The method can not completely get rid of the IST because that the squared Jost appear as the particular solution in the process of the IST. The most important technique in this approach is to find eigenfunctions of a linearized operator associated with the linearized equation. However, the eigenfunctions are actually derived

by making use of some knowledge of IST. Recently, Lou proposed a new direct perturbation method. It relies on no tools of IST, and it is very concise and easy to understand. The perturbation solutions obtained by this perturbation method are more abundant than those of other perturbation methods.

In this thesis, we study systematically Lou's new direct perturbation method. The contributions of this thesis can be summarized as follows: 1. The reliability of the direct perturbation method is verified by comparing the approximate solutions of an integrable nonlinear Schrödinger equation to its exact solutions. For smaller ϵ value, the agreement between the exact and approximate solutions is better, which indicates that the approximate solutions obtained through the direct perturbation method are more reliable. 2. We take different perturbed nonlinear Schrödinger equations (i.e., the coupled nonlinear Schrödinger equation and the (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation) as real examples to show the applicability of direct perturbation method. In usual perturbation methods, we have to treat different types of solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations separately, while in our treatment all the perturbation solutions can be obtained at the same time. Moreover, the zero-order solutions of perturbed equations can be any one of the exact solutions of the unperturbed equations, and

the first-order corrections can be any one of their symmetries. By making use of the computer algebra software Matlab, we simulate the coupled nonlinear Schrödinger equations with linear loss numerically. It turns out that the approximate analytical solutions obtained by the direct perturbation method agree well with the numerical solutions within a wide range of ϵ values. On the other hand, our work enriches Lou's direct perturbation method and offers some important examples. 3. Based on the reliable approximate solutions of perturbed nonlinear Schrödinger equations, the analytical form of the parameters of solitons can be well expressed. Under the action of the perturbation of linear loss, the amplitudes and energy of both single-solitons and multi-soliton decay exponentially with time. But there is no change in the velocities of solitons. Especially, the perturbations do not change the collision property of multi-soliton, i.e., for two soliton with the same amplitude, they will always propagate with the same amplitudes both before and after collision and there is no exchange and transfer of energy between them.

KEY WORDS: the direct perturbation method, nonlinear Schrödinger equation, perturbation, soliton solution

学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。论文中除了特别加以标注和致谢的地方外，不包含其他人或其他机构已经发表或撰写过的研究成果。其他同志对本研究的启发和所做的贡献均已在论文中作了明确的声明并表示了谢意。

研究生签名：程雪年　　日期：2006.10.24

学位论文使用授权声明

本人完全了解浙江师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅，可以采用影印、缩印或扫描等手段保存、汇编学位论文。同意浙江师范大学可以用不同方式在不同媒体上发表、传播论文的全部或部分内容。保密的学位论文在解密后遵守此协议。

研究生签名：程雪年　　导师签名：林　　日期：2006.10.25

一 引 言

(一) 概述

1 孤立子的由来及发展

有人认为非线性科学是 20 世纪继相对论、量子力学之后的"第三次科学革命"。一位物理学家 [1] 描绘"相对论的建立排除了对绝对空间和时间的牛顿幻想，量子力学的建立则排除了对可控制测量过程的牛顿迷梦，而非线性科学的建立更是排除了拉普拉斯决定论的可预见性的狂想"。非线性科学正在成为跨学科的研究前沿，它主要针对各学科中有关非线性的共性问题进行研究，特别是那些无法从线性模型稍加修正就可以解决的问题，以及它自身理论发展所需要的概念和方法。换言之，非线性科学是揭示各种非线性现象的共性，发展处理它们的普适方法。它的研究主体是混沌、分形和孤立子，而且这三者彼此互相联系。在本论文中，我们将研究其中的孤立子问题。

孤立子 (Soliton) 的名称，1965 年由 Zabusky 和 Kruskal[2] 提出，但最早对孤立子这种非线性现象的研究可以追溯到 1834 年，英国科学家罗梭 (James Scott Russell) 对爱丁堡到格拉斯哥的运河中浅水面上水波的观察。1844 年，他在《英国科学促进协会第 14 届会议报告》这份材料上发表的"论波动"一文中，对观察到的现象作了生动的描述 [3]：

> 我正在观察着一艘船的运动，它被一对马拉着快速地沿着狭窄的运河前进，当这艘船突然停下时，被船所带动的大量河水却并不停止，它们积聚在船头周围剧烈地扰动着。然后突然离开船头，以很快的速度向前滚动，形成一个圆而光滑、轮廓分明的、巨大的孤立的水堆，沿着运河继续前进，在行进过程中没有明显的形状改变和速度减少。我骑着马继续跟踪，发现它仍保持原有的大约 *30* 英尺的长度和 *1.5* 英尺的浪头，并以约每小时 *8* 至 *9* 英里的速度向前滚动。然后，高度逐渐减少，约 *1*、*2* 英里后消失在河道的转弯处 ······

这就是 1834 年 8 月 Russell 第一次观察到的奇特现象，他认为这种孤立的波动是流体运动的一个稳定解，并称它为"孤立波"。斯科特 (A.C.Scott)、

朱 (F.Y.F.Chu) 和麦克劳林 (D.W.MckLaughlin)[4] 曾对孤立波给出如下的定义：孤立波是一种扰动，它是具有局域性的行波。孤立波到处正则，没有奇异性，而且它不扩散，与普通的波不同，普通的波包要弥散。10 年之后的 1844 年，Russell 在浅水槽中做了一些实验，用多种方法激发，看到了相同的现象。但是 Russell 的学说并未能成功地使当时的物理学家信服，对这种波的性质的研究直到 1895 年 KdV(Korteweg de Vries) 方程的提出和 20 世纪 60 年代逆散射方法的发展起来后才得到彻底解决。

关于孤立子，目前尚无公认的定义。李政道 [5] 认为：在一个场论系统中，如果有一个经典解，它在任何时间都束缚于空间的有限区域内，那么，这样的解就叫做经典孤立子解。可以注意到，这里并没有给出孤子的明确定义。因此，比较恰当的做法是把如下三点作为孤子的定义，即：

(1) 孤立子是波动问题中的一种能量有限局域解；

(2) 能在空间给定区域稳定存在；

(3) 相互作用不改变各自的特性。

李政道等人基于对基本粒子的研究，又把现有的孤立子分为两类：拓扑性孤立子和非拓扑性孤立子。前者稳定存在的必要条件是有简并真空态，即在无穷远处存在不同的真空态，或者说有不同的边界条件；有孤立子解时，无穷远处的边界条件就与没有孤立子解时的不同。非拓扑孤立子不需要简并真空态，无论有无孤立子，在无穷远处都有相同的边界条件。一般地说，钟型分布的正、负孤波及其序列都是非拓扑的，但是 kink 解孤波 (其模方或其导数却是钟型的，如光纤中基本暗孤子就是例子之一) 是拓扑孤子。

2 孤立子方程

通常把描述波动在空间内作定域分布，而且在有限时间内表现相对稳定的那些非线性方程，都称为孤立子方程。到目前为止，很多物理和应用数学领域已经找到了一大批重要的孤立子方程和方程组。下面我们列举一些常见的具有代表性的孤立子方程及其对应的孤子解：

描写浅水波的 KdV 方程：

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

KdV 方程也是描述其他许多领域中孤波现象的模型：如在长波小振幅近似下，可描写冷等离子体的磁流体波的运动；非谐振晶格的振动；等离子体离子声波；弹性杆中纵向色散波；液、气两种混合态的压力波；管底下部流体底转动；低温下非线性晶格底声子波包底热激发等。

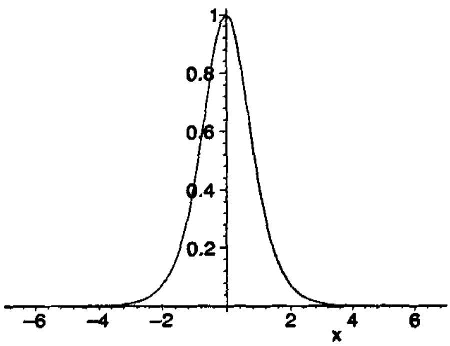


图 1-1: 钟型孤子

Fig.1-1: Bell soliton

其解呈钟型 (大体形状如图 1-1)，即

$$u(x,t) = -2a^2\text{sech}^2[a(x - 4a^2t - x_0)]. \tag{1.2}$$

其中 a，x_0 为常数，分别表征孤子的高度和初始位置。钟型解表示波动定域于较小的空间范围中，一旦波动传过后，介质即恢复原有状态。

描述流体短波和小振幅极限的方程、描述光纤中孤子传输方程和描述光波自聚焦的方程，都可归结为非线性薛定谔 (nonlinear Schrödinger) 方程：

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0. \tag{1.3}$$

其中，$i = \sqrt{-1}$，它有如下形式的单孤子解：

$$u(x,t) = 2\alpha\text{sech}2\alpha(x - 4\beta t)e^{-2t[x+2(\alpha^2-\beta^2)t]}. \quad (\alpha \neq 0) \tag{1.4}$$

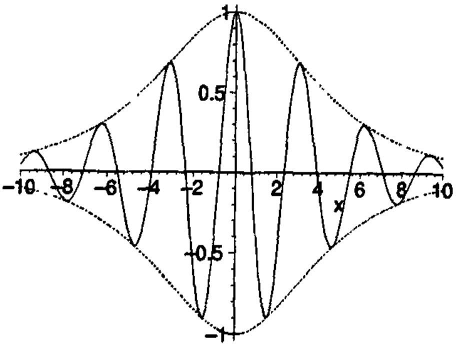


图 1-2: 包络孤子

Fig.1-2: Envelope soliton

它表示一个被调制了的平面波，其包络线 $2\alpha\text{sech}2\alpha(x-4\beta t)$ 为钟型孤子，故称包络孤子，形状大体如图 1-2。

描述相变问题、晶格缺陷、自感应透明、自旋的传播、铁磁体的 Bloch 墙、超导 Josephson 结、超离子导体、电荷密度、表面外延等方面的非线性孤波，都可归结为正弦一戈登 (sine-Gordon) 方程：

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0. \tag{1.5}$$

它的解有两种形式：

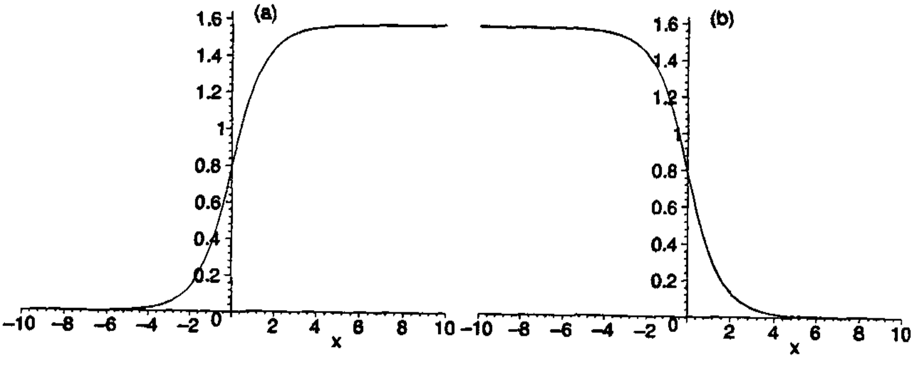


图 1-3: (a) 扭结解 (b) 反扭结解

Fig.1-3: (a)kink (b)anti-kink

一种是扭结型解：

$$u_1(x,t) = 4\arctan[e^{\pm(x-vt-x_0)/\sqrt{1-v^2}}]. \tag{1.6}$$

式中 x_0 为常数，形状如图 1-3。它们表示在两种具有相同能量和不同构形的状态之间的转变过程，当扭结在空间某处传过后，该处介质的构形就将发生转变。

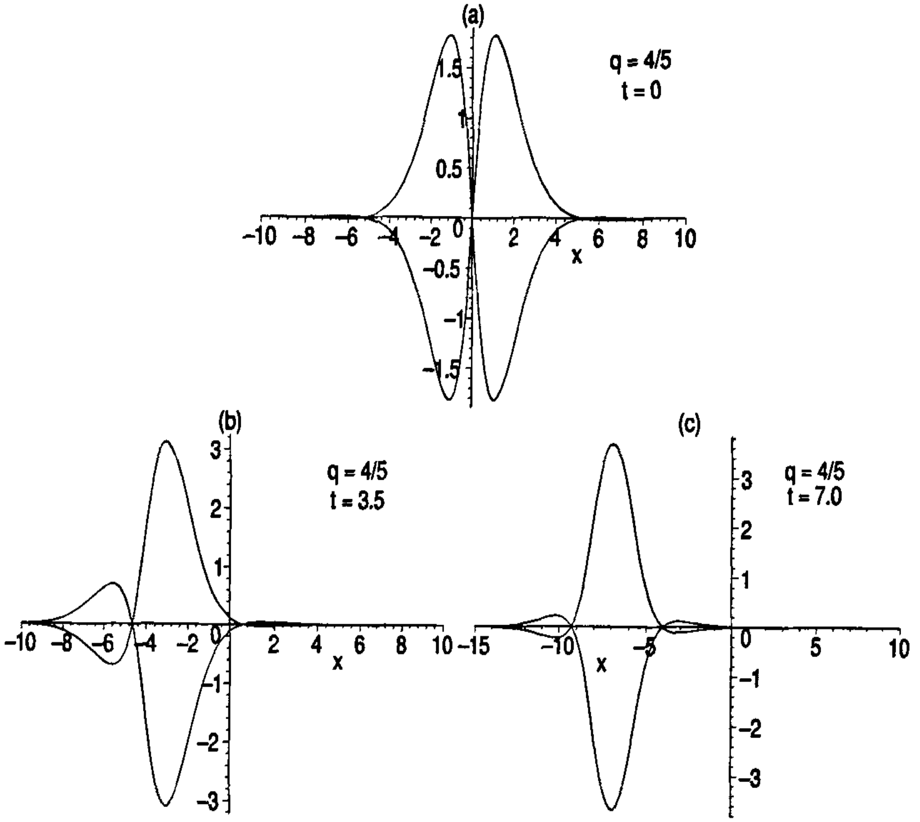


图 1-4: 呼吸子

Fig.1-4: Breathers

另一种类型是呼吸子解：

$$u_2(x,t) = 4\arctan[\frac{q\sin\omega(x-t)}{\omega\cosh(x+t)}]. \tag{1.7}$$

其中 $q^2+\omega^2=1$，形状大体如图 1-4。它表示一种强度作周期变化的波包。

除了以上的几种典型的孤子方程以外，人们还推导出了许多著名的具有孤子解的标准的非线性演化方程或方程组，如

修正 Kortewey de Vies(MKdV) 方程：

$$u_t \pm u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.8}$$

Burgers 方程：

$$u_t + u u_x + u_{xx} = 0, \tag{1.9}$$

Boussinesq 方程：

$$u_{tt} = u_{xx} + (3u^2)_{xx} + u_{xxxx}, \tag{1.10}$$

ϕ^4 方程：

$$u_{xx} - u_{tt} = -u + u^3 \tag{1.11}$$

等等。同时，人们也提出了许多求标准的非线性演化方程孤子解的方法：如逆散射方法 (IST)[6, 7]，Hirota 双线性方法 [8]，Painlevé 分析法 [9, 10]，Darboux 变换 [11]，对称约化方法 [12]，变量分离方法 [13]，Bäcklund 变换法 [14] 等等。方程的解也从孤子推广到反孤子、呼吸子、扭结解、涡旋解、瞬子解、磁单极子解等。孤立子所具有的广泛的实际应用背景促使孤立子理论的研究和应用均得到了迅速的发展。

3 微扰理论的概述

标准的模型往往是高度理想化的，在实际问题中，考虑到某些实际因素，如阻尼、外加驱动等，往往要讨论包含修正项的对应的非线性偏微分方程，这时，要严格地求得其精确解非常困难。于是，当修正项（即实际的系统和这些理想化的模型之间往往存在的一些细微差异，我们称之为微扰）可以作为小量时，发展实用的微扰方法也就成为必要。由此孤子微扰理论就应运而生了。由于微扰存在的普遍性，研究微扰对非线性演化方程的孤子解的影响的微扰理论也日益成为孤子理论研究的一个重要方面。一般地，微扰可以分为两类：

一类是哈密顿微扰 (Hamitonian Perturbation)；另一类是耗散微扰 (Dissipative Perturbation)。

到目前为止，人们已经发展了很多有效的微扰方法，例如：(i) 逆散射微扰方法 [15]–[22]；(ii) 哈密顿微扰方法 [23]–[26]；拉格朗日微扰方法 [27]；(这两种方法都起源于变分法) (iii) 修正守恒律微扰方法 [28]–[32]；(iv) 直接微扰方法 [33]–[42]；(v) 奇点微扰方法 [43]–[46]；(vi) 线性微扰方法 [47, 48]；(vii)Hirota 微扰方法 [49] 等等。下面着重介绍其中的三种微扰方法。

(1) 修正守恒律微扰方法

当修正项很小且远离共振时，孤子的演化行为是绝热的，在这种情况下，修正影响仅表现为孤子参数 (如幅度、频率) 的变化，而不产生相应的附加项。绝热关系体现为非线性与色散的平衡，非线性效应与脉冲幅度有关，而色散则与脉冲宽度联系在一起，故绝热关系体现为 (振幅)×(脉宽)= 常数。

下面以微扰非线性薛定谔方程为例来说明这种理论的主要思想：

$$i\frac{\partial q}{\partial Z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q=i\epsilon R[q,q^*], \tag{1.12}$$

式中 $i\epsilon R[q,q^*]$ 为微扰项，$\epsilon \ll 1$。为描述孤子参数的变化，可导出其演化方程。将式 (1.12) $\times q^*$ 加上式 (1.12) 的复共轭 $\times q$，将所得方程对 T 积分，并注意到 q, q_T 在 T 的无穷远处为 0，则由非线性薛定谔方程的守恒量

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}|q|^2dT \tag{1.13}$$

和总能量

$$W=2\sum_{l=1}^{N}\eta_l, \tag{1.14}$$

可得

$$\frac{dW}{dZ}=\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}(q^*R+qR^*)dT \tag{1.15}$$

及

$$\frac{dW}{dZ}=i\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}(q_T^*R+q_TR^*)dT \tag{1.16}$$

$$\frac{dH_0}{dZ}=2\epsilon\int_{-\infty}^{\infty}\{(\frac{1}{2}q_{TT}^*+|q|^2q^*)R+(\frac{1}{2}q_{TT}^*+|q|^2q)R^*\}dT. \tag{1.17}$$

式中 W, M, H_0 分别为孤子的能量、动量与哈密顿量。在微扰情况下，假设方程具有如下形式的解:

$$q(T,Z)=\eta(Z)\mathrm{sech}[\eta(Z)(T-T_0(Z))]e^{-i\kappa T+i\sigma Z}. \tag{1.18}$$

式中 $T_0(Z)$ 和 σZ 由下式给出

$$\frac{dT_0}{dZ}=-\kappa,$$
$$\frac{d\sigma}{dZ}=\frac{1}{2}(\eta^2-\kappa^2). \tag{1.19}$$

将式 (1.18) 代入 (1.15)、(1.16)，可得关于 $\eta(Z)$ 与 $\kappa(Z)$ 的演化方程

$$\frac{d\eta}{dZ}=\frac{\epsilon}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(q^*R+qR^*)dT, \tag{1.20}$$

$$\frac{d\kappa}{dZ}=\frac{i\epsilon}{2\eta}\int_{-\infty}^{\infty}(q_T^*R-q_TR^*)$$
$$-\frac{\epsilon\kappa}{2\eta}\int_{-\infty}^{\infty}(q^*R+qR^*)dT. \tag{1.21}$$

注意到，式 (1.20) 和 (1.21) 精确到 ϵ 级，实际上，微扰项会产生相同级次的非线性孤子成分，但修正守恒律微扰方法不能对它们进行分析。另外，象高阶色散等一些属于哈密顿型的微扰项，它们并不影响孤子幅度 η 和中心频率 κ，但可能影响孤子的中心位置及相位。但在修正守恒律方法中，只有孤子幅度和频率两个独立的变量，难以描述哈密顿型的微扰问题。所以修正守恒律方法有其局限性，不能用于分析非孤子成分与哈密顿型的微扰问题。但在研究非哈密顿型微扰，如损耗、非线性增益、滤波器等微扰时，修正守恒律微扰方法具有广泛的应用。在很多情况下，修正守恒律微扰方法也适用于多孤子情况。

(2) 逆散射微扰方法

在 20 世纪 70 年代后期，Kaup[15]，Karpman 和 Maslov[16] 分别提出了逆散射微扰方法，并在随后的一些工作中得以扩充 [17, 18]。关于逆散射微扰方法的一些早期的成果，Karpman 和 Newell 分别在文献 [19] 和 [20] 中作了回顾和总结，并且 Abdullaev 和 Khabibullaev[21] 对此作了补充。后来，Kivshar 和 Malomed[22] 对这方面的工作作了较为详尽的总结。

这种方法的主要思想是：运用 Lax 对形式，孤子的微扰方程形式为：

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} + [\hat{L}, \hat{B}] = \epsilon R[u]. \tag{1.22}$$

此时，算子 $\hat{L}$ 依然满足 Sturm-Liouvill 方程

$$\hat{L}\Psi = \lambda\Phi, \tag{1.23}$$

但是，和未受微扰影响的情况不一样， λ 已不再独立于时间了，本征函数 Φ 也不满足演化方程 $\Phi_t^0 = \hat{B}\Phi^0$。此时 Jost 解的引入，它们的解析性和渐进行为都与不含修正项的非线性演化方程一样，逆散射方程也保留原来同样的形式，只是散射数据 $S(t) = \{r(t,\lambda), c_n(t), \lambda_n\}$ 随时间的演化需另行设法求出。

方程 (1.22) 对时间 t 微分：

对于分立谱得：

$$(\hat{L} - \lambda)(\Psi_t - \hat{B}\Psi) = \lambda_t \Psi - \epsilon R[u]\Psi. \tag{1.24}$$

对于连续谱得：

$$(\hat{L} - \lambda)(\frac{\partial \Psi k}{\partial t} - \hat{B}\Psi_k) = -\epsilon R[u]\Psi_k. \tag{1.25}$$

(1.24) 和 (1.25) 是非齐次常微分方程，要先求解其对应的齐次方程，然后利用参数变易法求解，可导出离散谱，反射系数，正归化系数随时间的演化关系。由 (1.24) 和 (1.25) 可定出得散射数据随时间的演化关系代入逆散射方程定出解，此解将满足含修正项的非线性演化方程。所以整个方法的关键在于：怎样确定散射数据随时间的演化。

此方法的优点与不足：(i) 处理孤子微扰问题的能力很强，能成功地处理很多的孤子微扰问题，如 KdV，SG 和 NLS 等等非线性演化方程的孤子微扰问题。

(ii) 思路迂回曲折，而且该方法建立在 IST 的基础上，它要求未受微扰影响的非线性演化方程能够用 IST 精确求解。因而只适用于可积系统。而就一般情况而言，拉克斯 (Lax) 对算子较难求得，这就使得此方法的应用有很大的局限性。且对于那些不懂得 IST 法的人来说，想运用此方法非常困难。

(3) 直接微扰方法

此方法由 Ostrovskii 和他的同事创立 [33, 34]。随后，此方法在不同的微扰模型的应用中得以发展和完善：如微扰的 sine-Gordon 方程 [35]-[38]，微扰的 nonliear Schrödinger 方程 [39]，微扰的 nonlinear Klein-Gordon 方程 [40] 等等。

该方法的主要思想是：将微扰方法的解在未受微扰影响的方程的孤子解附近展开而导出一个关于修正解的非齐次线性化偏微分方程，然后利用与之相应的线性偏微分算子的本征函数构造一套正交完备化基矢来求解上述偏微分方程。在直接孤子微扰方法的发展中，Herman 做了很杰出的成绩。他的方法简述如下：

A. 微扰方程的线性化

引进多重尺度，将解作渐进级数展开 $u = u_0 + \epsilon u_1 + \cdots$, 得到一修正方程

$$\hat{L}u_1 = F_1. \tag{1.26}$$

其中 $\hat{L}$ 是一个含时、空变量的偏微分算子。

B. 正交完备化基矢的构造

a) 构造一正交完备化的基矢去求解方程 (1.26)

$$\hat{L}\Omega = \lambda\Omega, \tag{1.27}$$

$$L^A\Omega^A = \lambda'\Omega^A, \tag{1.28}$$

其中 $\hat{L}^A$ 是 $\hat{L}$ 的伴随算子。由逆散射理论中的 Jost 函数的平方函数与算子 $\hat{L}$ 和 $\hat{L}^A$ 本征函数的关系来求解 $\hat{L}$ 和 $\hat{L}^A$ 的本征函数系，且使其完备化。

b) 由线性算子的反演求得微扰解

$$\hat{L}u_1 = F_1, \tag{1.29}$$

$$u_1 = \int f\Omega d\lambda, \tag{1.30}$$

$$F_1 = \int f_t\Omega d\lambda. \tag{1.31}$$

C. 微扰对孤子的影响的分析

消除 u_1 中的久期项获得孤子参数随时间的演化，一般相应于线性算子的束缚态。

此方法的优缺点：(i) 此方法只需知道无微扰方程的精确的孤子解和已线性化方程算子 $\hat{L}$ 的本征函数，它不要求无微扰方程是精确可积的，因此它既适用于可积系统，又适用于非可积系统。

(ii) 此方法思想表面上看来是与 IST 毫不相干，可实际操作过程中巧妙地运用了一些 IST 的结论。所以此微扰法并没有完全脱离对 IST 的依赖，与其仍有或多或少的关联。且关于直接法的含时、空的偏微分算子的本征函数系，前人并没有找到直接求解它的方法，都是利用它与 IST 间的某种联系来求得，因此它间接地依赖于 IST。

(iii) 直接微扰方法只适用于单孤子微扰问题。

由于以上的直接微扰方法对 IST 的间接依赖，很大程度上限制了它的发展。直到 20 世纪 90 年代，颜家壬 [41, 42] 发展了一种新的直接微扰理论。这种方法完全摆脱了对 IST 的依赖，具有较大的普适性和实用性。

此微扰方法由三部分组成：

(i) 运用经典微扰理论中的微分展开法线性化微扰的孤子方程；

(ii) 求被线性化的方程中的线性算子及其伴随算子的本征值问题，构造两个正交完备化的本征函数集；

(iii) 微扰对孤子的影响的分析：以本征函数集为基来求解被线性化的方程，求得一阶近似下的孤子解，通过消去久期项的条件求得孤子参数随时间和空间慢变量的变化情况。

在前人的基础上，楼 [50] 发展了一种新的直接微扰方法。它完全摆脱了对 IST 的依赖，且思路直接，容易理解和接受，实际操作过程比其他的微扰方法也要简单得多。更值得一提的是，在利用此法来处理微扰问题的过程中，我们无需求任何函数的本征值，并且能很容易得到微扰方程的一阶修正。而且利用这种直接微扰方法得到的微扰解远比用其他微扰方法得到的解要丰富得多。此方法主要由以下三个部分组成：

(i) 将拟设的解的形式代入微扰方程，得到关于 ϵ 的各级近似方程；

(ii) 令微扰小参量 ϵ 的相同次幂的系数等于零：其中使得零阶解为未受微扰影响的非线性演化方程的精确解，一阶修正为该演化方程的对称。

(iii) 解满足以上情况时的相应的相容性条件。

目前这种方法尚在进一步发展完善之中。

(二) 论文的研究意义及其框架

非线性薛定谔方程是现代科学中最重要也是最普遍的非线性模型之一。作为描述波包在弱非线性色散介质中传播的普遍方程，它出现在物理和应用数学的各个领域中。例如，光纤孤立子通信，非线性晶格的振动问题，水表面波问题，充满流体的弹性管道中的波动问题，血管中血流非线性波问题等都由非线性薛定谔方程描述。

然而，标准的非线性薛定谔模型是高度理想化的。在实际问题中，往往要讨论包含修正项的方程，这时，要严格地求解一般是不可能的。于是，当修正项可以当作微扰时，发展实用的微扰方法成为必要。由此微扰理论就应运而生了。而且由于微扰存在的普遍性，研究微扰对非线性演化方程的孤子解的影响具有更为实际的意义。

直到目前为止，为解决非线性薛定谔方程的微扰问题，人们已经提出了很多有效的微扰方法，包括修正守恒律微扰方法；逆散射微扰方法；直接微扰方法；奇点微扰方法等等。我们知道，其中最著名的是逆散射微扰方法。它处理微扰问题的能力很强，能成功地处理很多复杂的孤子微扰问题，但其思路迂回曲折。对于那些不懂得 IST 法的人来说想运用此方法是非常困难的。另外，Ostrovsky 等人提出的直接微扰方法在实际操作过程中巧妙地运用了一些 IST 的结论，故它并未摆脱对 IST 的依赖。最近，在前人的基础上，楼发展了一种新的直接微扰方法。它完全摆脱了对 IST 的依赖，且思路简洁，操作简单，具有较大的普适性与实用性。本学位论文利用直接微扰方法来实现对微扰非线性薛定谔方程的近似求解，为进一步讨论方程的解的性质提供了很好的基础，也为进一步讨论方程的形态提供了一种很好的工具。

全文共分为四章：第一章简要地介绍了孤立子的由来以及它的发展历程；并列举了几种具有代表性意义的孤立子方程以及它们的孤子解；同时也简要地回顾了微扰理论的形成和发展。第二章从标准的非线性薛定谔方程出发，介绍了它的研究情况及丰富的孤立子解。简要回顾了非线性薛定谔方程的微扰理论的发展历程并详细介绍了本论文着重要运用的直接微扰方法，进而通过将这种直接微扰方法运用到一个可积的含修正项的非线性薛定谔方程来验证直接微扰方法的可靠性。论文的第三章，将楼的直接微扰方法应用到各类不同的微扰非线性薛定谔方程，包括微扰的耦合非线性薛定谔方程和 (2+1) 维非线性薛定谔方程。基于微扰方法给出的近似解，我们还分析了微扰项对孤子的各个参数的影响，如孤子的振幅、传播速度、相位和波数等等。进一步地，利用数值方法一分步傅立叶方法对含线性损耗项的耦合非线性薛定谔方程进行了数值模拟。通过数值解与近似的解析解的比较，很好地说明了直接微扰方法的准确性和有效性。最后是总结和展望。

二 直接微扰方法

(一) 非线性薛定谔方程

非线性薛定谔方程 (NLSE)

$$iA_t + A_{xx} + 2|A|^2 A = 0, \tag{2.1}$$

是现代科学中最重要也是最普遍的非线性模型之一。方程 (2.1) 中，A 是变量 t 与 x 的复函数，$|A|^2 = AA^*$。作为描述波包在弱非线性色散介质中传播的普遍方程，NLSE 出现在物理和其他的许多分支中，包括非线性量子场理论 [51]–[53]，凝聚态物理 [54]，等离子体物理 [55]–[57]，非线性光学 [58]–[61] 和量子电子学 [62]，流体物理 [63, 64]，微扰和相变理论 [65, 66]，生物物理 [67] 等。正是因为 NLSE 所具有的广泛的应用性和重要性，一直以来都吸引着一大批数学家和物理学家们的注意力。NLSE 的最著名的解是孤子解。孤子的典型特性时以一个局域波的形式在与另一个孤子相互作用的时候，保持了类粒子的性质。特别地，在非线性光学方面，由于近年来在无线电通讯领域，信息高速公路已成为一个热门话题。孤子通讯系统由于其具有符合高速通讯系统所要求的特性而将成为信息高速公路所需传输媒介的主要候选。光孤子由于其特有的性质成为了长距离、高比特率光通讯系统的信息载体。由于在通讯和超快信号发送系统中的广泛应用，超短光脉冲在光纤中的传输情况受到了极大的关注。最近对全光孤子通讯系统的研究表明，孤子通讯可以克服线性通讯系统速度、距离的限制。众所周知，皮秒光孤子的传输正是由标准的 NLSE 来控制。所以，在预言孤子存在的可能性，以及 Mollenauer，Stolen 和 Gordon 的实验发现之后，NLSE 的光孤子被认为是自然数据比特和超高速光学通讯系统的新生代重要选择。

在 Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura[68] 于 1967 年为求解 KdV 方程创立了 IST 之后，Zakharov 和 Shabad[6] 于 1971 年将它推广到求解 NLSE 中。Zakharov 和 Shabad 建立的 IST 是求解 NLSE 和其他类似的方程的最系统的方法。并在无反射的情况下，导出了决定 NLSE 多孤子解的线代数方程

组 [69]。

NLSE 的最简单的单孤子解可以写成：

$$A(x,t) = -2l\phi(x,t)\mathrm{sech}\{2l(x - x_0 + 4kt)\}. \tag{2.2}$$

其中，

$$\phi(x,t) = e^{-2ikx-4i(k^2-l^2)t-i\phi_0}. \tag{2.3}$$

这里，k, l, ϕ_0 和 x_0 分别为表征孤子速度、振幅、初始相位和初始位置的四个实常数。

双孤子解为：

$$A_2 = 2\frac{N_2}{D_2}. \tag{2.4}$$

其中，

$$D_2 = [(\mu_1 - \mu_2)^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2]$$

$$+2\nu_1\nu_2[\tanh\theta_1 \tanh\theta_2 - \mathrm{sech}\theta_1\mathrm{sech}\theta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{2.5}$$

$$N_2 = \{[(\mu_1 - \mu_2)^2 + \nu_1^2 - \nu_2^2] - i2\nu_2(\mu_1 - \mu_2)\tanh\theta_2\}\nu_1\mathrm{sech}\theta_1 e^{-i\varphi_1}$$

$$+\{[(\mu_1 - \mu_2)^2 - \nu_1^2 + \nu_2^2] + i2\nu_1(\mu_1 - \mu_2)\tanh\theta_1\}\nu_2\mathrm{sech}\theta_2 e^{-i\varphi_2}. \tag{2.6}$$

随后，Hirota 用以双线性微分方程为基础的直接法，给出了 NLSE 的孤子解的显式。假设方程的 (2.1) 的解可表示为：

$$u = \frac{g}{f}, \tag{2.7}$$

并且不失一般性，分母 f 设为实函数。另设实函数 f 可按 Γ 的偶次幂展开成级数，而复函数 g 按 Γ 的奇次幂展开级数：

$$f(x,t) = 1 + f^{(2)}\epsilon^2 + f^{(4)}\epsilon^4 + \cdots + f^{(2j)}\epsilon^{2j} + \cdots, \tag{2.8}$$

$$g(x,t) = g^{(1)}\epsilon + g^{(3)}\epsilon^3 + \cdots + g^{(2j+1)}\epsilon^{2j+1} + \cdots. \tag{2.9}$$

将 (2.7)-(2.9) 代入方程 (2.1)，并令 Γ 的同次幂系数相等得 NLSE 的单孤子解 [70]：

$$f_1 = 1 + e^{\eta_1+\eta_1^*+\theta_{13}},$$

$$g_1 = e^{\eta_1}. \tag{2.10}$$

双孤子解为：

$$g_2 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*+\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{23}} + e^{\eta_1+\eta_2+\eta_2^*+\theta_{12}+\theta_{14}+\theta_{24}}, \tag{2.11}$$

$$f_2 = 1 + e^{\eta_1+\eta_1^*+\theta_{13}} + e^{\eta_1+\eta_2^*+\theta_{14}} + e^{\eta_2+\eta_1^*+\theta_{23}+\eta_2+\eta_2^*+\theta_{24}}$$
$$+e^{\eta_1+\eta_2+\eta_1^*+\eta_2^*+\theta_{12}+\theta_{13}+\theta_{14}+\theta_{23}+\theta_{24}+\theta_{34}}. \tag{2.12}$$

其中

$$e^{\theta_{12}} = 2(k_1 - k_2)^2, \tag{2.13}$$

$$e^{\theta_{34}} = 2(k_1^* - k_2^*)^2, \tag{2.14}$$

$$e^{\theta_{j,2+l}} = \frac{1}{2(k_j + k_l^*)^2}, \quad (j, l = 1, 2) \tag{2.15}$$

$$\eta_j = \omega_j \tau + k_j \xi + \eta_j^{(0)}, \quad \omega_j = i k_j^2. \quad (j = 1, 2) \tag{2.16}$$

这里 k_j (j=1,2) 均为任意复常数。

用 Hirota 方法得到的 n 孤子解所对应的分母与分子可表示成：

$$f_n = \sum_{\mu=0,1} A_1(\mu) e^{\sum_{j=1}^{2n} \mu_j \eta_j + \sum_{1\le j\le l}^{2n} \mu_j \mu_l \theta_{jl}}, \tag{2.17}$$

$$g_n = \sum_{\mu=0,1} A_2(\mu) e^{\sum_{j=1}^{2n} \mu_j \eta_j + \sum_{1\le j\le l}^{2n} \mu_j \mu_l \theta_{jl}}. \tag{2.18}$$

其中

$$\eta_{n+j} = \eta_j^*, \quad (j = 1, 2, ..., n) \tag{2.19}$$

$$e^{\theta_{j(n+l)}} = \frac{1}{2(k_j + k_l^*)^2}, \quad (j, l = 1, 2, ..., n) \tag{2.20}$$

$$e^{\theta_{jl}} = 2(k_j - k_l)^2, \quad (j < l = 2, 3, ..., n) \tag{2.21}$$

$$e^{\theta_{(n+j)(n+l)}} = 2(k_j^* - k_l^*)^2 = e^{\theta_{jl}^*}, \quad (j < l = 2, 3, ..., n) \tag{2.22}$$

$A_1(\mu)$，$A_2(\mu)$ 表示当 $\mu_j (j = 1, 2, ..., n)$ 取所有可能的 0 或 1 时，还需分别满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_{j+n}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_{j+n} + 1. \tag{2.24}$$

另外还有其他的各种求解非线性偏微分方程的方法也被用来求解 NLSE，如 Darboux 变换，Bäcklund 变换，Painlevé 分析法，截断展开法等等。这里就不再一一详细介绍了。

在实际应用中，诸如非线性薛定谔孤子的牛顿粒子行为、静孤子现象、弱周期外力驱动下出现的分形以及光纤的损耗等各种行为对孤子的影响引起了研究者的广泛兴趣。而要考虑这种种的影响，就需要在基本方程上添加不同的修正项。这时，我们就需要处理包含修正项的 NLSE。对于这样的方程，如果修正项可以当作小量，即能看作微扰，那么发展有效的微扰方法就成为必要，而这些微扰方法也正是处理实际问题所不可缺少的。

Kaup[15] 在研究 NLSE 受阻尼影响时，通过将包含微扰的动力学方程转换到散射空间，首先建立了 NLSE 的微扰理论。随后，Keener 和 Mclaughlin[71] 使用格林函数法，以及 Ichikawa[39] 研究 Langmuir 波包受非线性 Landau 阻尼影响时采用的“绝热近似法”都对该方程的微扰理论作出了重要的贡献。其中 Keener 和 Mclaughlin 利用双重尺度技巧和格林函数建立了一套形式上独立于 IST 的直接微扰方法。但我们明显地可以看出，展开基矢是依靠 IST 求得的。Kaup 后来的工作、以及 Herman[72, 73] 发展的直接微扰方法也存在着同样的问题，它们实际是类似的。Herman 使用的展开基矢是利用算子的本征函数和 IST 里面的 Jost 函数的关系，以及 Kaup 的工作作为基础来构建的。这些基矢的构造包含了相当复杂的推导。之后，颜 [41, 42] 提出的直接微扰方法虽然改善了对 IST 的依赖关系，操作起来也更简单。但是，就多孤子微扰问题，这种直接方法也还是没能很好地给以解决。所以在很大程度上，这种直接微扰方法还是限制了人们对某些实际问题的处理。

在随后的章节中，我们将采用楼提出的直接微扰方法来研究各类 NLSE 的微扰问题，楼的方法不仅摆脱了对逆散射方法的依赖，使得实际的操作过程大大简化，更重要的是这种直接微扰方法能够同时得到各种不同类型的微扰解，包括单孤子的、多孤子的以及周期性的解等等。

(二) 直接微扰方法

这一节中，我们将对楼在文献 [50] 中提出的直接微扰方法作详细的叙述。并就该方法的可靠性进行简单分析。

光纤损耗是描述光信号在光纤中传输时能量损失的一个参数。光纤每单位长度的损耗，直接关系到光纤通信系统传输距离的长短。形成光纤损耗的原因很多，有来自光纤本身的损耗，也有光纤与光源的耦合损耗以及光纤之间的连接损耗。考虑损耗后的 NLSE 具有如下形式 [74]:

$$iA_t + A_{xx} + 2|A|^2 A = -i\epsilon A. \tag{2.25}$$

其中，$\epsilon = \gamma T_0^2/|k_0|$。

当满足条件

$$\epsilon\xi = \gamma z \ll 1 \tag{2.26}$$

时，方程 (2.25) 右边的项可当作微扰项，这就是我们接下来所要研究的微扰 NLSE。

由于考虑到微扰方程的零阶解应该为无微扰 NLSE 的精确解，我们将微扰 NLSE(2.25) 中的场量 A 展开成:

$$A = e^{\epsilon(a+ib)} A'(\xi,\tau,\epsilon) = e^{\epsilon(a+ib)}[A_0(\xi,\tau) + \epsilon A_1(\xi,\tau) + O(\epsilon^2)]. \tag{2.27}$$

其中

$$a \equiv a(x,t),\ b \equiv b(x,t),\ \xi \equiv \xi(x,t,\epsilon),\ \tau \equiv \tau(x,t,\epsilon) \tag{2.28}$$

均为给定变量的实函数。这里，ξ,τ 需满足以下性质:

$$\{\xi,\tau\} \xrightarrow{\epsilon\to 0} \{x,t\}. \tag{2.29}$$

也就是说，当 $\epsilon \to 0$ 时，A_0 为标准 NLSE 的精确解。将展开式 (2.27) 代入方程 (2.25)，得到如下近似方程:

$$A_{0\xi\xi}\xi_x^2 + 2e^{2\epsilon a}|A_0|^2 A_0 + iA_{0\tau}\tau_t + \epsilon(iA_{1\tau}\tau_t + A_{1\xi\xi}\xi_x^2 + 4e^{2\epsilon a}|A_0|^2 A_1$$

$$+2e^{2\epsilon a}A_0^2 A_1^*) + \epsilon(ia_t - b_t)A_0 + \epsilon(a_{xx} + ib_{xx})A_0 + i\epsilon A_0 + \xi_{xx}A_{0\xi}$$

$$+i\xi_t A_{0\xi} + 2\epsilon\xi_x(a_x + ib_x)A_{0\xi} + 2\xi_x\tau_x A_{0\xi\tau} + A_{0\tau}\tau_{xx} = O(\epsilon^2). \tag{2.30}$$

由于考虑到 ξ,τ 有如 (2.29) 式的性质，所以 ξ_t,τ_x,ξ_{xx} 均为 ϵ 的一阶项。令 ϵ 的相同次幂的系数等于零，得到如下各级近似方程：

$$A_{0\xi\xi}\xi_x^2 + 2e^{2\epsilon a}|A_0|^2 A + iA_{0\tau}\tau_t = 0, \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}&\epsilon(iA_{1\tau}\tau_t + A_{1\xi\xi}\xi_x^2 + 4e^{2\epsilon a}|A_0|^2 A_1 + 2e^{2\epsilon a}A_0^2 A_1^*)\\&+\epsilon(ia_t - b_t)A_0 + \epsilon(a_{xx} + ib_{xx})A_0 + i\epsilon A_0 + \xi_{xx}A_{0\xi}\\&+i\xi_t A_{0\xi} + 2\epsilon\xi_x(a_x + ib_x)A_{0\xi} + 2\xi_x\tau_x A_{0\xi\tau} + A_{0\tau}\tau_{xx} = 0.\end{aligned} \tag{2.32}$$

由于方程 (2.31) 中的场量 A_0 是不显含 ϵ 的，所以 ξ,τ 与 a 的依赖关系可以表示成：

$$\xi_x = e^{\epsilon a}, \quad \tau_t = e^{2\epsilon a}. \tag{2.33}$$

这样，A_0 即为以下 NLSE

$$iA_{0\tau} + A_{0\xi\xi} + 2|A_0|^2 A = 0 \tag{2.34}$$

的精确解。注意到，此时 NLSE(2.34) 以 ξ,τ 为变量。另外，从展开式 (2.27) 中不难发现，一阶修正 A_1 正是 NLSE(2.31) 的对称，也就是说，A_1 是方程 (2.34) 的线性化方程

$$iA_{1\tau} + A_{1\xi\xi} + 4|A_0|^2 A_1 + 2A_0^2 A_1^* = 0 \tag{2.35}$$

的解。我们知道，NLSE 的对称已经被很多的物理学家和数学家们研究过 [75]。它的最简单的两个形式可以写成：

$$A_1 = A_{0\xi}, \quad A_1 = A_{0\tau}. \tag{2.36}$$

对于给定的一个非平庸解 A_0，方程 (2.32)，(2.35) 和 (2.33) 在任意的空间 x 处和时间 t 下都是相容的，这就要求方程 (2.32) 中其余的项均为零，即

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\epsilon}(i\xi_t + \xi_{xx}) + 2(a_x + ib_x)\xi_x = 0,\\&i(a_t + ib_t) + (a_{xx} + ib_{xx}) + i = 0, \quad \tau_x = 0.\end{aligned} \tag{2.37}$$

通过简单的计算得到

$$a=-2t,\ b=\frac{x^2}{2},$$

$$\xi=xe^{-2\epsilon t},\ \tau=\frac{1-e^{-4\epsilon t}}{4\epsilon}. \tag{2.38}$$

于是，将函数 a, b 和变量 ξ,τ 代回展开式 (2.27) 中，就可以确定微扰 NLSE(2.25) 的近似解。

通过以上对直接微扰方法的介绍，我们不难发现，微扰解中的 A_0 可以是 NLSE(2.31) 的任意一个解，包括单孤子解，多孤子解，甚至呼吸子解等。它们的具体形式可以参见本章第一节。其中 A_1 则可以为方程 (2.31) 的无穷多个对称中的任意一个。例如，同样的零阶解 A_0 可以跟不同的一阶修正 A_1 组成不同的近似解，而且，不同的零阶解 A_0 也可以有相同的 A_1 作为一阶修正。所以，采用楼的直接微扰方法得到的微扰解比其他微扰方法得到的解要丰富得多。

若取微扰 NLSE(2.25) 的零级解 A_0 为单孤子解 (2.2)-(2.3)，则相应的微扰解可表示成：

$$A=-2le^{-2\epsilon t}e^{i\nu}\mathrm{sech}[\frac{-2lk+2lke^{-4\epsilon t}}{\epsilon}-2lxe^{-2\epsilon t}+2lx_0]$$

$$\times\{1-2i\epsilon k+2\epsilon l\tanh[\frac{-2lk+2lke^{-4\epsilon t}}{\epsilon}-2lxe^{-2\epsilon t}+2lx_0]\}. \tag{2.39}$$

其中

$$A_1=A_{0\xi},$$

$$\nu=\frac{\epsilon x^2}{2}+\frac{-(l^2-k^2)(1-e^{-4\epsilon t})}{\epsilon}-2kxe^{-2\epsilon t}-\phi_0. \tag{2.40}$$

前面我们提到，人们已经利用各种微扰方法对方程 (2.25) 作过研究，也得到了各种不同形式的微扰解。例如 (以单孤子解为例)

(1) 逆散射微扰方法

将微扰解设成：

$$A=2l\mathrm{sech}Ze^{-i\varphi}, \tag{2.41}$$

$$Z = 2l(x-\xi), \tag{2.42}$$

$$\varphi(x,t) = 2k(x-\xi)+\delta. \tag{2.43}$$

通过计算后得到其中各参量如下 [69]：

$$k = k_0, \tag{2.44}$$

$$\xi = \xi_0 - 4k_0 t, \tag{2.45}$$

$$l = l_0 e^{-2\epsilon t}, \tag{2.46}$$

$$\delta = \delta_0 - 4k_0^2 t - \frac{l_0^2}{\epsilon}(1-e^{-4\epsilon t}). \tag{2.47}$$

以上的量凡是带下标 0 的都是任意常数 (下同)。当 $\epsilon \to 0$，

$$\delta = \delta_0 - 4(k_0^2 + l_0^2)t, \tag{2.48}$$

$$l = l_0. \tag{2.49}$$

在这样的极限下，微扰解退化为无微扰的 NLSE 的单孤子解。

(2) 颜的直接微扰方法

利用该方法得到的 k, ξ, l 的形式与 (2.44)-(2.46) 完全相同，唯一不同的是 [41]

$$\delta = \delta_0 - (4k_0^2 - \epsilon)t + \frac{l_0^2}{\epsilon}e^{-4\epsilon t}. \tag{2.50}$$

但是，当 $\epsilon \to 0$，微扰解却不能退化为无微扰的 NLSE 的单孤子解。

(3) 楼的直接微扰方法

将微扰解 (2.39)-(2.40) 写成如下形式

$$A = 2l\,\mathrm{sech}Z e^{-i\varphi}, \tag{2.51}$$

$$Z = 2l(X-\xi), \tag{2.52}$$

$$\varphi(x,t) = 2k(X-\xi)+\delta. \tag{2.53}$$

则

$$X = xe^{-2\epsilon t}, \tag{2.54}$$

$$l = l_0 e^{-2\epsilon t}, \tag{2.55}$$

$$k = k_0, \tag{2.56}$$

$$\xi = \xi_0 - \frac{k_0 + k_0 e^{-4\epsilon t}}{\epsilon}, \tag{2.57}$$

$$\delta = \delta_0 - \frac{k_0^2 - k_0^2 e^{-4\epsilon t}}{\epsilon} - \frac{l_0^2 - l_0^2 e^{-4\epsilon t}}{\epsilon} - \frac{\epsilon x^2}{2}. \tag{2.58}$$

当 $\epsilon \to 0$，有

$$X = x,$$

$$\xi = \xi_0 - 4k_0 t,$$

$$\delta = \delta_0 - 4(k_0^2 + l_0^2)t, \tag{2.59}$$

$$l = l_0. \tag{2.60}$$

此时，微扰解退化为无微扰 NLSE 的单孤子解。进一步地，比较不同微扰方法得到的 ξ，δ，X 等参量，不难发现本论文中所用的直接微扰方法得到的近似解中的各个参量比其他两种方法得到的具有更高阶的修正。而且，利用该直接微扰方法，我们还得到了近似解的一阶修正。所以，我们有理由相信，利用楼的直接微扰方法得到近似解有更高的准确性。

(三) 直接微扰方法的可靠性分析

上一节中，我们详细叙述了楼提出的直接微扰方法，并从与其他微扰方法得到的近似解的比较中发现，该直接法得到的解具有更好的准确性。为了进一步从量上来确定该直接微扰方法的可靠性。这一节中，我们将直接微扰方法运用到可积的含修正项的 NLSE 来获得它的近似解，借助 Maple 工具将得到的近似解与其精确解进行比较和分析，以此来确定直接微扰方法的可靠性 [76]。

考虑如下的含修正项的 NLSE[77]：

$$iu_t + i\gamma_1 u_z + \gamma_2 u_{zz} + \sigma |u|^2 u = 0. \tag{2.61}$$

其中下标表示对时间变量 t 和空间变量 z 的求导。在非线性光学意义下，u 表示光脉冲的缓变包络振幅函数，z 和 t 分别表示脉冲在光纤中的传输距离和时间，方程中 $\gamma_1 = \partial k/\partial\omega = 1/v_g$ (v_g 为群速度)，$\gamma_2 = \partial^2 k/\partial\omega^2$，由于光波的传播常数 k 与频率 ω 的依赖关系，不同频率的波其传播速度会不同，由此将产生色散，故 γ_1, γ_2 是反映光纤的色散的两个参量。方程中第四项描述脉冲的非线性效应。

1 精确解

采用以群速度 v_g 运动的参考系来描述方程 (2.61)，即

$$Z = z - t/v_g = z - \gamma_1 t, \quad T = t. \tag{2.62}$$

则方程 (2.61) 可简化成：

$$iu_T + \gamma_2 u_{ZZ} + \sigma|u|^2 u = 0. \tag{2.63}$$

众所周知，方程 (2.63) 为标准 NLSE。它有如下形式的亮孤子解：

$$u(Z,T) = 2\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\sigma}}\, l e^{-i[2kZ+4\gamma_2(k^2-l^2)T+\theta_0]}\operatorname{sech}[2l(Z - Z_0 + 4k\gamma_2 T)]. \tag{2.64}$$

这里 l, k, Z_0, θ_0 为四个实参数，分别衡量孤子的高度（宽度）、速度、初始位置和初始相位。将 $Z = z - \gamma_1 t$, $T = t$ 回代，得到方程 (2.61) 的单孤子解为 (以 u_e 来标记精确解)：

$$\begin{aligned} u_e &= 2\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\sigma}}\, l e^{-i[2k(z-\gamma_1 t)+4\gamma_2(k^2-l^2)t+\theta_0]}\operatorname{sech}[2l(z-\gamma_1 t - Z_0 + 4k\gamma_2 t)] \\ &= 2\sqrt{\frac{2\gamma_2}{\sigma}}\, l e^{-i[2kz+(4\gamma_2 k^2-4\gamma_2 l^2-2k\gamma_1)t+\theta_0]}\operatorname{sech}[2l(z - Z_0 + (4k\gamma_2 - \gamma_1)t)]. \end{aligned} \tag{2.65}$$

此时，孤子的高度 (宽度)，初始位置和初始相位仍然由参数 l, Z_0, θ_0 确定，而孤子的传播速度变成由参数 k 和 γ_1 共同表征。

2 近似解

如果将方程 (2.61) 中色散项 $i\gamma_1 u_z$ 看成小量，我们就可以用直接微扰方法对其进行处理。令 $\gamma_1=\epsilon\mu$，其中 ϵ 是表征微扰强弱的小参量，μ 为任意常数。利用直接微扰方法，使得方程 (2.61) 的解 u 具有如下形式：

$$u=e^{\epsilon(\alpha+i\beta)}U(\zeta,\ \tau,\epsilon)=e^{\epsilon(\alpha+i\beta)}(u_0(\zeta,\ \tau)+\epsilon u_1(\zeta,\ \tau)+\cdots). \tag{2.66}$$

其中 $\alpha\equiv\alpha(z,t)$，$\beta\equiv\beta(z,t)$，$\zeta\equiv\zeta(z,t,\epsilon)$，$\tau\equiv\tau(z,t,\epsilon)$ 均为待定的实函数，ζ，τ 有如下性质：

$$\{\zeta,\tau\}\xrightarrow{\epsilon\to 0}\{z,t\}. \tag{2.67}$$

这样，当 $\epsilon\to 0$ 时，u_0 退化为为 NLSE(2.63) 的精确解。

将展开式 (2.66) 代入方程 (2.61)，并令 ϵ 的相同次幂的系数等于零，得到如下各级近似方程：

$$iu_{0\tau}\tau_t+\gamma_2 u_{0\zeta\zeta}\zeta_z^2+e^{2\epsilon\alpha}\sigma|u_0|^2u_0=0. \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}&i\epsilon u_{1\tau}\tau_t+\gamma_2\epsilon u_{1\zeta\zeta}\zeta_z^2+2e^{2\epsilon\alpha}\sigma\epsilon|u_0|^2u_1+e^{2\epsilon\alpha}\sigma\epsilon u_0^2u_1^*+i\epsilon\alpha_t u_0\\&-\epsilon\beta_t u_0+\gamma_2\epsilon\alpha_{zz}u_0+i\gamma_2\epsilon\beta_{zz}u_0+2\gamma_2\epsilon\alpha_z u_{0\zeta}\zeta_z+2i\gamma_2\epsilon\beta_z u_{0\zeta}\zeta_z\\&+i\epsilon\mu u_{0\zeta}\zeta_z+\gamma_2 u_{0\zeta}\zeta_{zz}+iu_{0\zeta}\zeta_t+\gamma_2 u_{0\tau}\tau_{zz}+2\gamma_2 u_{0\tau\zeta}\tau_z\zeta_z=0.\end{aligned} \tag{2.69}$$

$$\cdots\cdots$$

我们知道，方程 (2.68) 中 u_0 是不显含 ϵ 的，所以变量 ζ，τ 依赖于函数 a 的关系式为：

$$\tau_t=e^{2\epsilon\alpha},\quad \zeta_z=e^{\epsilon\alpha}. \tag{2.70}$$

并且 u_0 为以下 NLSE

$$iu_{0\tau}+\gamma_2 u_{0\zeta\zeta}+\sigma|u_0|^2u_0=0 \tag{2.71}$$

的精确解，u_1 是方程 (2.71) 的线性化方程

$$iu_{1\tau}+\gamma_2 u_{1\zeta\zeta}+2\sigma|u_0|^2u_1+\sigma u_0^2u_1^*=0 \tag{2.72}$$

的解。它的最简单的两个形式可以表示成：

$$u_1=u_{0\tau},\quad u_1=u_{0\zeta}. \tag{2.73}$$

给定一个非平凡解 u_0，方程 (2.69)，(2.72) 和 (2.70) 对于任意 z, t 都是相容的，所以方程 (2.69) 中其他项的系数应全部为零，即

$$i\alpha_t - \beta_t + \alpha_{zz} + ib_{zz} = 0, \quad \zeta_z\tau_z = 0,$$

$$2\epsilon\alpha_z\zeta_z + 2i\epsilon\beta_z\zeta_z + i\epsilon\mu\zeta_z + \zeta_{zz} = 0. \tag{2.74}$$

解之得

$$\alpha = C, \;\; \beta = -\mu t/2, \;\; \tau = te^{2\epsilon C}, \;\; \zeta = ze^{\epsilon C}. \tag{2.75}$$

其中 C 为任意常数。因此，方程 (2.61) 的微扰解可表示成以下形式 (以 u_a 标记近似解)：

$$u_a = e^{\epsilon C - i\epsilon\mu t/2}(u_0 + \epsilon u_1). \tag{2.76}$$

3 可靠性分析

图 2-1 给出了不同位置处精确解的强度 $|u_e|^2$ 和近似解的强度 $|u_a|^2$ 随时间的演化图。其中近似解中 u_0 取如 (2.64) 式形式，参数为：(a) $k=0.5$, $l=0.6$, $C=0.8$, $\gamma_1=\epsilon=0.01$, $Z_0=\theta_0=0$, $\mu=\gamma_2=1$, $\sigma=2$ 和 (b) $k=0.5$, $l=0.6$, $C=-0.4$, $\gamma_1=\epsilon=0.5$, $Z_0=\theta_0=0$, $\mu=\gamma_2=1$, $\sigma=2$。在传播过程中，两列孤立波分别保持各自的高度、速度、相位不变，这正是孤立波的一个重要特征。当 ϵ 足够小时 (见图 2-1(a))，方程 (2.61) 的近似解与精确解符合得相当好。这时，直接微扰方法给出的近似解有效地描述了方程 (2.61) 的解的情况。不过引进直接微扰方法改变了孤波的传播速度，此时精确解比近似解传播得快，随着传输距离 z 的增加，近似解开始稍微落后于精确解。z 越大，近似解偏移精确解的程度也越明显。另外，引进直接微扰方法增加了参数 C，近似解的强度的大小对它也有一定的依赖关系，通过选取合适的 C 可以给出与精确解较符合的近似解。

当 ϵ 值增加时 (见图 2-1(b))，两列孤立波的传播速度都减小 (它们的具体形式可由解 (2.65) 给定)，其中近似解的孤子落后于精确解中孤子的传播，这就使得在 z 逐渐增加的过程中近似解与精确解越来越不匹配。此时，一阶修正

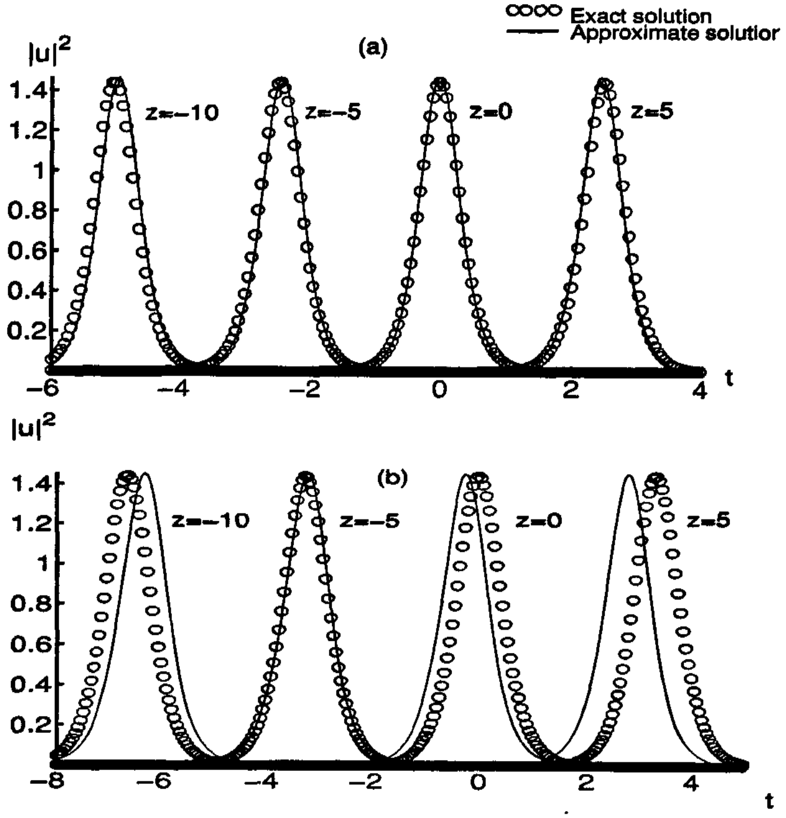


图 2-1: 不同位置处精确解和近似解的振幅随时间的演化图. 参数分别为

(a)$k = 0.5,\ l = 0.6,\ \ C = 0.8,\ \gamma_1 = \epsilon = 0.01,\ \theta_0 = Z_0 = 0,\ \mu = \gamma_2 = 1,\ \sigma = 2.$

(b)$k = 0.5,\ l = 0.6,\ \ C = -0.4,\ \gamma_1 = \epsilon = 0.5,\ \theta_0 = Z_0 = 0,\ \mu = \gamma_2 = 1,\ \sigma = 2.$

Fig.2-1: The time evolution of amplitudes of one-soliton solutions with different distances. The parameters are (a)$k = 0.5,\ l = 0.6,\ C = 0.8,\ \gamma_1 = \epsilon = 0.01,\ \theta_0 = Z_0 = 0,\ \mu = \gamma_2 = 1,\ \sigma = 2$ (b)$l = 0.6,\ C = -0.4,\ k = \gamma_1 = \epsilon = 0.5,\ \theta_0 = Z_0 = 0,\ \mu = \gamma_2 = 1,\ \sigma = 2.$

u_1 相对于零级解 u_0 已经不再是小量，而且近似解 (2.76) 对于方程 (2.61) 也不再是一个有效的近似解。

ϵ	0.01	0.05	0.10	0.20	0.50	$\cdots$
$\|u_a\|^2$	1.438659	1.400838	1.367302	1.333991	1.330704	$\cdots$
$\frac{\|\triangle\|}{\|u_e\|^2}(\%)$	0.093125	2.719583	5.048472	7.361736	7.59	$\cdots$

表 2-1: $z=10$ 处相同时间下近似解的最大强度 $|u_a|^2$ 与精确解的最大强度 $|u_e|^2$ 的相对误差的比较图 (其中 $|u_e|^2=1.44$)

表 2-1 给出了 $z=10$ 处相同时间下取不同的 ϵ 值时近似解的最大强度 $|u_a|^2$ 与精确解的最大强度 $|u_e|^2$ 的相对误差的比较。其中参数取为 $k=0.5$, $l=0.6$, $Z_0=\theta_0=0$, $\mu=\gamma_2=1$, $\sigma=2$，此时精确解的最大强度为 $|u_e|^2=1.44$。表中 $|\triangle|=||u_e|^2-|u_a|^2|$ 表示精确解的最大强度与近似解的最大强度的绝对误差。从表中我们观察到：当 ϵ 小于 0.1 时，相对误差均小于 5%。一般地，我们认为此时直接微扰方法可以很好地描述微扰方程的情况。随着 ϵ 的增加，两者之间的误差也有所增加。

通过以上的简单分析，我们发现当参量 ϵ 值相对于所要研究的问题来说足够小时直接微扰方法可以很好地描述微扰方程的解的情况，此时该直接微扰方法对于我们研究微扰 NLSE 中孤子的传播有很好的可靠性。而且因为微扰普遍存在，所以我们所采用的直接微扰方法对研究微扰对 NLSE 中孤子的影响有广泛的意义。

(四) 微扰对孤子的影响

从式 (2.39)-(2.40) 中看到，由于受到微扰项 $-i\epsilon A$ 的影响，孤子的振幅随着时间的增加指数衰减，而且相位也发生了改变。进一步地，令 (2.39) 式中

$$\mathrm{sech}[\frac{-2lk+2lke^{-4\epsilon t}}{\epsilon}-2lxe^{-2\epsilon t}+2lx_0]=\mathrm{sech}\phi, \tag{2.77}$$

并将 ϕ 展开到 ϵ 阶，即

$$\phi\approx 2l[(-1+2\epsilon t)(4kt+x)+x_0]. \tag{2.78}$$

此时，我们发现，孤子的速度 $v = 4k$ 并没有发生改变，不过波数 $\varphi = 2l(-1+2\epsilon t)$ 不再是常数，而是随着时间 t 的变化而变化。

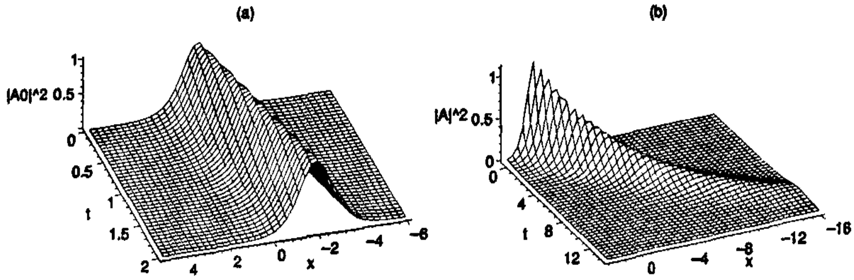


图 2-2: (a)NLSE 的单孤波 (2.2) 的强度演化图. (b)u_0 取与 (a) 中相同形式时，微扰 NLSE(2.25) 的近似解 (2.39) 的模方 $|A|^2$ 演化图. (2.2)-(2.3) 式中的参数取为：$k=0.25,\ l=0.5,\ x_0=\phi_0=0$.

Fig.2-2: (a)Evolution of intensity profile of one-soliton solutions of NLSE. (b)Evolution of intensity profile $|A|^2$ of solution of perturbed NLSE with $\epsilon=0.06$. The parameters in (2.2)-(2.3) are $k=0.25,\ l=0.5,\ x_0=\phi_0=0$.

图 2-2(a) 中，我们给出了 NLSE 的单孤立波 (2.2) 的强度的演化，图 2-2(b) 则为取 u_0 与 2-2(a) 图中相同形式时，微扰 NLSE 的近似解 (2.39) 的模方 $|A|^2$ 的演化图。方程 (2.2) 和 (2.3) 中参数取 $k=0.25,\ l=0.5,\ x_0=\phi_0=0$ 以及 (2.25) 式中 $\epsilon=0.06$。从 2-2(a) 图我们知道，当没有微扰作用时，孤立波沿着 x 轴稳定地传输，它的形状、传播方向和速度都没有发生变化。但是由于存在损耗 (即微扰项 $-i\epsilon A$)，孤子的形状发生了明显的变化：此时，孤波能量会持续减少使得孤子的高度随着时间的增加作指数衰减。当 $t\to\infty$，孤子振幅也逐渐减小并趋向 0。而且很明显地，孤子的传播方向也发生了改变。

图 2-3(a) 表示 NLSE 的双孤立波的强度演化图。取 u_0 与 2-3(a) 图中相同形式时，微扰 NLSE 的近似解的模方 $|A|^2$ 随时间的演化如图 2-3(b)，方程 (2.25) 中取 $\epsilon=0.01$。当没有微扰作用时，两孤立波沿着 x 轴稳定地传输，它的形状、传播方向和速度都不发生变化。但是从图 2-3(b) 我们观察到，微扰 $-i\epsilon A$ 使孤子的形状发生了明显的变化：此时，孤波的振幅也是随着时间的增加而指数衰减并逐渐趋于 0。但是，微扰并不会改变两孤子间的能量分布，即

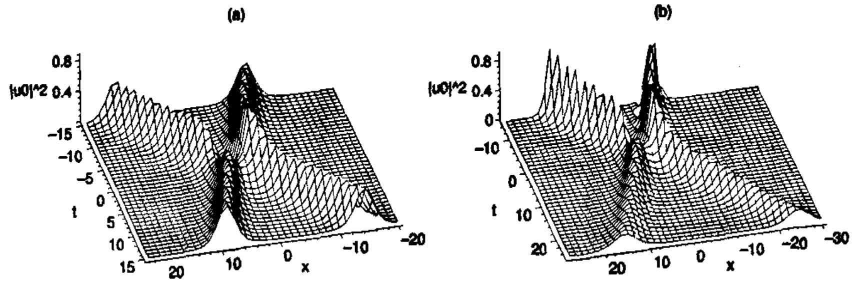


图 2-3: (a)NLSE 的双孤波的强度演化图. (b) 取 u_0 与 (a) 图中相同形式且 $\epsilon = 0.01$ 时，微扰 NLSE(2.25) 的近似解的模方 $|A|^2$ 的演化图. (2.11)-(2.16) 式中取 $k_1 = 0.5 + 0.2i$, $k_2 = 0.5 - 0.5i$, $\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0$.

Fig.2-3: (a)Evolution of intensity profile of two-soliton solutions of NLSE. (b)Evolution of intensity profile $|A|^2$ of solution of perturbed NLSE with $\epsilon = 0.01$. The parameter in (2.11)-(2.16) are $k_1 = 0.5 + 0.2i$, $k_2 = 0.5 - 0.5i$, $\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0$.

在有微扰作用下，原来等幅的两孤子无论在碰撞前还是碰撞后能量还是会均匀地分布在两分量上而不转移或交换。所以说，碰撞的性质不会因为微扰的影响而发生变化。

(五) 小结

利用直接微扰方法处理 NLSE 的微扰问题的过程中得到的近似解中的零阶解可以取微扰 NLSE 的精确解，而且是任意一个，而一阶修正则可以为无微扰方程的任意一个对称。众所周知，NLSE 的精确解和对称均有无穷多个。因此，采用楼的直接微扰方法得到的近似解明显比利用其他的微扰方法得到的解要丰富得多。这里，相同的零阶解与不同的一阶修正可以组成不同的近似解；或者，不同的零阶解和相同的对称也可以组成不同的近似解。

图 2-4 给出了在不同时间下，取相同的零阶解与两个不同的一阶修正组成的两个近似解的振幅之间的比较，其中 (a) 为单孤子；(b) 为双孤子。图中用圆圈表示一阶修正取 $u_1 = u_{0\xi}$ 的情形，实线表示 $u_1 = u_{0\tau}$。u_0 则分别由 (2.2) 式 (单孤子) 和 (2.11)-(2.16) 式 (双孤子) 来确定。式中参数分别

取 $k = 0.25$，$l = 0.5$，$x_0 = 0$，$\epsilon = 0.2$ 和 $k_1 = 0.5 + 0.2i$，$k_2 = 0.5 - 0.5i$，

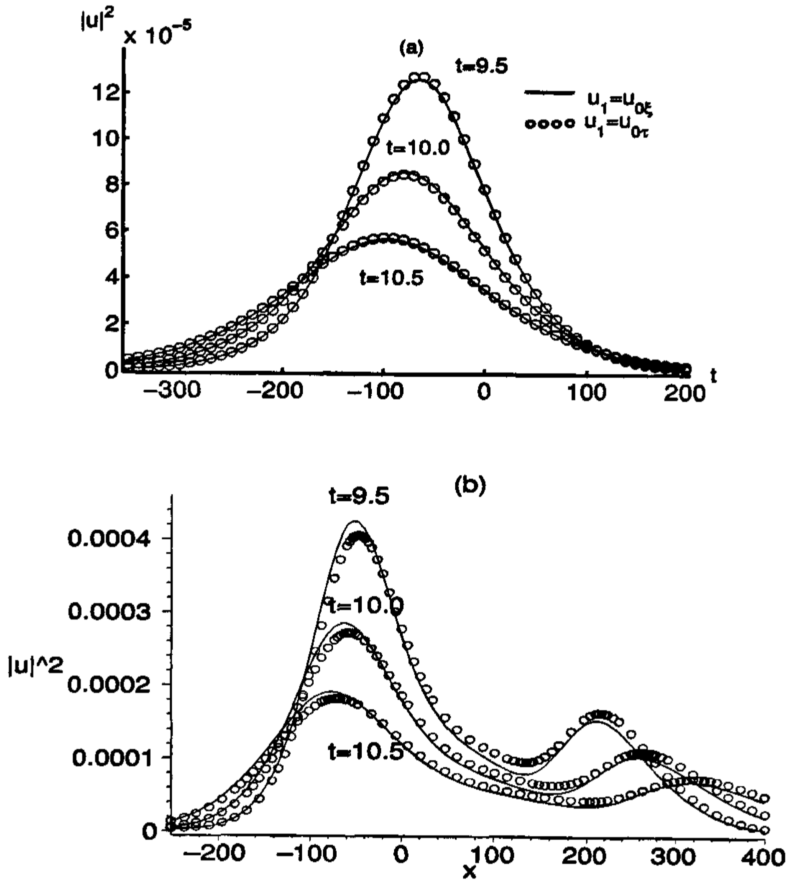


图 2-4: 相同的零阶解不同一阶修正情况下两个不同近似解的模方的比较图. 图中圆圈表示一阶修正取 $u_1 = u_{0\xi}$，实线表示 $u_1 = u_{0\tau}$. (a) 单孤子; (b) 双孤子.

Fig.2-4: The time evolution of amplitudes of solutions with the same zero-order solution and different first-order solutions. (a) one-soliton; (b)two-soliton.

$\eta_1^{(0)} = \eta_2^{(0)} = 0$，$\epsilon = 0.2$。我们知道，本身一阶修正并不是对解起主要作用的部分，它的改变只是很微小的。反映在图 2-4 中的结果就是：取不同的一阶修正时，两个近似解的振幅几乎完全重合，虽然此时的 $\epsilon = 0.2$(已经不算是小量了)。

三 非线性薛定谔方程族的近似解

上一章我们以 (1+1) 维的微扰 NLSE 为例，详细叙述了楼提出的直接微扰方法，并继而将采用直接微扰方法获得的近似解与用其他微扰方法得到的解进行了简单的比较。从中不难发现，楼的直接微扰方法有较大的优越性：(1) 不依赖逆散射方法，也就是在这种直接微扰方法中，不要求无微扰的 NLSE 是可以用逆散射方法精确求解的；(2) 思路直接，容易理解和接受；(3) 利用楼的直接微扰方法能同时得到各种不同类型的微扰解，包括单孤子型，多孤子型，周期型解等等。在解决了 (1+1) 维 NLSE 的微扰问题后，我们自然想问，该直接微扰方法能不能用来解决其他的 NLSE 的微扰问题，如高维的 NLSE，耦合非线性薛定谔方程等等？

据我们所知，到目前为止大多数的微扰方法均倾向于处理单场量的非线性演化方程的微扰问题，很少见到有处理耦合非线性演化方程组的微扰问题的，而鉴于它们在各种不同的物理领域的广泛应用，它们已经成为人们广泛关注的课题。另外在实际问题中还存在着大量的二维甚至更高维的非线性演化方程，关于它们的微扰问题，迄今也仍然难于求得其解析形式的解，而只能通过计算机去求数值解或进行模拟。

所以在这一章中，我们将证实用直接微扰方法也能解决耦合非线性薛定谔方程组以及 (2+1) 维 NLSE 的微扰问题 [78, 79]。

(一) 耦合非线性薛定谔方程组

耦合非线性薛定谔方程组 (CNLSE)

$$iu_t + c_1u_{xx} + (\alpha_{11}|u|^2 + \alpha_{12}|v|^2)u = 0,$$

$$iv_t + c_2v_{xx} + (\alpha_{22}|v|^2 + \alpha_{21}|u|^2)v = 0. \tag{3.1}$$

作为描述非线性现象的基本模型之一，它出现在许多不同的物理领域中，如非线性光学 [80, 81]，生物物理 [82]，凝聚态物理 [83, 84] 等，因此也越来越受到人

们的关注。尤其地，在非线性光学中，CNLSE 用于描述双折射光纤中不同模式的光纤的相互作用，其中 u，v 表示两相互作用的光纤模式的缓变振幅，c_1 和 c_2 为色散系数。这个方程既包括了自相位调制 (SPM) $|u|^2u$ 和 $|v|^2v$，又包含了交叉相位调制 (XPM) $|v|^2u$ 和 $|u|^2v$。同相位调制是形成孤子的先决条件，而交叉相位调制则引起不同模式 (包括极化) 或不同信道之间的耦合。当两束或更多束光波同时在光纤中传输时，它们将通过光纤中的非线性发生相互作用。通常，这样的相互作用在适当的条件下通过不同的非线性现象会产生新的波，如受激喇曼散射和受激布里渊散射、谐波产生以及四波混频，但是，相同的非线性通过上述交叉相位调制现象也可在入射波之间产生耦合。

早在 20 世纪 70 年代，Manakov[82] 首次利用 IST 研究了 CNLSE (3.1) 的可积性，他发现当 $c_1 = c_2 = 1$, $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22}$ 时 (满足该条件的 CNLSE(3.1) 后来也因此被称为 Manakov 方程)，方程 (3.1) 是可积的。后来，Zakharov 和 Schulman[83] 关于方程 (3.1) 的可积性的研究对 Manakov 的结果进行了补充，他们认为当且仅当

$$c_1 = c_2, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{3.2}$$

或者

$$c_1 = -c_2, \quad \alpha_{11} = \alpha_{22} = -\alpha_{12} = -\alpha_{21} \tag{3.3}$$

时，方程组 (3.1) 才是可积的，即它们可以用 IST 进行求解，除此之外的其他的情况都是不可积的。同样的可积条件也曾被 Radhakrishnan 等人利用 Painlevé 分析法报道过 [84]。

文献 [82] 中，Manakov 还进一步给出了 CNLSE(3.1) 的单孤立子解：

$$\begin{aligned} u &= \cos(\theta)e^{i\delta}\sqrt{2}pe^{i\{qx+(p^2-q^2)t+\zeta_0\}}\operatorname{sech}(px-2pqt+\gamma_0), \\ v &= \sin(\theta)e^{-i\delta}\sqrt{2}pe^{i\{qx+(p^2-q^2)t+\zeta_0\}}\operatorname{sech}(px-2pqt+\gamma_0). \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 p, q, θ, δ, γ_0, ζ_0 都是任意实常数。从解 (3.4) 中，我们也可以知道孤立子的振幅 $\sqrt{2}p$，速度 $2q$，初始的中心位置 $-\gamma_0/p$ 等参数。

继 Manakov 的开拓性的工作后，越来越多的物理学家为 CNLSE 的解的研究投入了大量的精力，特别是它的孤立子解。如 Radhakrishnan 利用 Hirota

方法给出了 Manakov 方程的单孤子解 [85]：

$$u = \frac{\alpha e^{\eta_1}}{1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + R}},$$

$$v = \frac{\beta e^{\eta_1}}{1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + R}}. \tag{3.5}$$

其中

$$e^R = \frac{\mu(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}{(k_1 + k_1^*)^2},$$

$$\eta_j = k_j(t + ik_j x) + \eta_j^{(0)}. \tag{3.6}$$

双孤子解 [86, 87]：

$$u = \frac{\alpha_1 e^{\eta_1} + \alpha_2 e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + S_1} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^* + S_2}}{1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + R_1} + e^{\eta_1 + \eta_2^* + S_0} + e^{\eta_1^* + \eta_2 + S_0^*} + e^{\eta_2 + \eta_2^* + R_2} + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^* + R_3}},$$

$$v = \frac{\beta_1 e^{\eta_1} + \beta_2 e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + S_1'} + e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^* + S_2'}}{1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + R_1} + e^{\eta_1 + \eta_2^* + S_0} + e^{\eta_1^* + \eta_2 + S_0^*} + e^{\eta_2 + \eta_2^* + R_2} + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^* + R_3}}. \tag{3.7}$$

其中

$$\alpha_s = \cos(\theta_s) e^{i\delta_s}, \quad \beta_s = \sin(\theta_s) e^{-i\delta_s},$$

$$\eta_s = k_s \xi + i k_s^2 \tau + \eta_{s0}, \quad k_s = p_s + i q_s,$$

$$\eta_{s0} = \gamma_{s0} + i\zeta_{s0}, \qquad e^{S_0} = \frac{\kappa_{12}}{k_1 + k_2^*},$$

$$e^{R_1} = \frac{\kappa_{11}}{k_1 + k_1^*}, \qquad e^{R_2} = \frac{\kappa_{22}}{k_2 + k_2^*},$$

$$e^{S_1} = \frac{k_1 - k_2}{(k_1 + k_1^*)(k_1 + k_2^*)}(\alpha_1 \kappa_{21} - \alpha_2 \kappa_{11}),$$

$$e^{S_1'} = \frac{k_1 - k_2}{(k_1 + k_1^*)(k_1^* + k_2)}(\beta_1 \kappa_{21} - \beta_2 \kappa_{11}),$$

$$e^{S_2} = \frac{k_2 - k_1}{(k_2 + k_2^*)(k_1 + k_2^*)}(\alpha_2 \kappa_{12} - \alpha_1 \kappa_{22}),$$

$$e^{S_2'} = \frac{k_2 - k_1}{(k_2 + k_2^*)(k_1 + k_2^*)}(\beta_2 \kappa_{12} - \beta_1 \kappa_{22}),$$

$$e^{R_3} = \frac{|k_1 - k_2|^2}{(k_1 + k_1^*)(k_2 + k_2^*)|k_1 + k_2|^2}(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}),$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\alpha_i \alpha_j^* + \beta_i \beta_j^*}{2(\alpha_i + \alpha_j^*)}. \tag{3.8}$$

这里 p_s，q_s，θ_s，δ_s，γ_{s0}，ζ_{s0} $(s = 1, 2)$ 均为任意实常数。

1 近似解

为简单和方便起见，在本节中我们只研究当 $c_1 = c_2 = \alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$ 时的 CNLSE(3.1) 的微扰问题，即

$$iu_t + u_{xx} + (|u|^2 + |v|^2)u = -i\epsilon u,$$

$$iv_t + v_{xx} + (|v|^2 + |u|^2)v = -i\epsilon v. \tag{3.9}$$

在非线性光学中，微扰项 $i\epsilon u$ 和 $i\epsilon v$ 表示线性损耗，其中 ϵ 为衡量微扰强度的小参量。当 $\epsilon = 0$ 时，方程组 (3.9) 将退化为标准的 CNLSE(3.1)。

利用楼的直接微扰方法，将方程组 (3.9) 中的 u 和 v 展开成:

$$u = e^{\epsilon(a+ib)} u'(\xi, \tau, \epsilon) = e^{\epsilon(a+ib)} [u_0(\xi, \tau) + \epsilon u_1(\xi, \tau) + O(\epsilon^2)],$$

$$v = e^{\epsilon(c+id)} v'(\xi, \tau, \epsilon) = e^{\epsilon(c+id)} [v_0(\xi, \tau) + \epsilon v_1(\xi, \tau) + O(\epsilon^2)]. \tag{3.10}$$

这里，

$$a \equiv a(x,t),\ b \equiv b(x,t),\ c \equiv c(x,t),$$

$$d \equiv d(x,t),\ \xi \equiv \xi(x,t,\epsilon),\ \eta \equiv \eta(x,t,\epsilon) \tag{3.11}$$

均为待定的实函数，并且变量 $\{\xi, \tau\}$ 满足以下关系式:

$$\{\xi, \tau\} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \{x, t\}. \tag{3.12}$$

因此，当 $\epsilon \to 0$ 时，u_0 和 v_0 将退化为无微扰的 CNLSE 的精确解。

将展开式 (3.10) 代入微扰的 CNLSE (3.9)，得到

$$iu_{0\tau}\tau_t + u_{0\xi\xi}{\xi_x}^2 + e^{2\epsilon a}|u_0|^2 u_0 + e^{2\epsilon c}|v_0|^2 u_0 + \epsilon[iu_{1\tau}\tau_t + u_{1\xi\xi}{\xi_x}^2$$

$$+ e^{2\epsilon a}(u_1^* {u_0}^2 + 2|u_0|^2 u_1) + e^{2\epsilon c}(u_1|v_0|^2 + u_0 v_1 v_0^* + u_0 v_0 v_1^*)]$$

$$+ i\epsilon(a_t + ib_t)u_0 + \epsilon(a_{xx} + ib_{xx})u_0 + i\epsilon u_0 + i\xi_t u_{0\xi} + \xi_{xx} u_{0\xi}$$

$$+2\epsilon(a_x+ib_x)\xi_x u_{0\xi}+2\xi_x\tau_x u_{0\xi\tau}+\tau_{xx}u_{0\tau}=O(\epsilon^2), \tag{3.13}$$

$$iv_{0\tau}\tau_t+v_{0\xi\xi}{\xi_x}^2+e^{2\epsilon c}|v_0|^2v_0+e^{2\epsilon a}|u_0|^2v_0+\epsilon[iv_{1\tau}\tau_t+v_{1\xi\xi}{\xi_x}^2$$
$$+e^{2\epsilon c}(v_1^*{v_0}^2+2|v_0|^2v_1)+e^{2\epsilon a}(v_1|u_0|^2+v_0u_1u_0^*+v_0u_0u_1^*)]$$
$$+i\epsilon(c_t+id_t)v_0+\epsilon(c_{xx}+id_{xx})v_0+i\epsilon v_0+i\xi_t v_{0\xi}+\xi_{xx}v_{0\xi}$$
$$+2\epsilon(c_x+id_x)\xi_x v_{0\xi}+2\xi_x\tau_x v_{0\xi\tau}+\tau_{xx}v_{0\tau}=O(\epsilon^2). \tag{3.14}$$

由于 ξ,τ 有如 (3.12) 的性质，所以 ξ_t，τ_x 和 ξ_{xx} 都是 ϵ 的一阶项。令方程组 (3.13) 和 (3.14) 中 ϵ 的相同次幂的系数均等于零，得到如下各级近似的方程组：

$$iu_{0\tau}\tau_t+u_{0\xi\xi}{\xi_x}^2+e^{2\epsilon a}|u_0|^2u_0+e^{2\epsilon c}|v_0|^2u_0=0,$$
$$iv_{0\tau}\tau_t+v_{0\xi\xi}{\xi_x}^2+e^{2\epsilon c}|v_0|^2v_0+e^{2\epsilon a}|u_0|^2v_0=0. \tag{3.15}$$

和

$$\epsilon[iu_{1\tau}\tau_t+u_{1\xi\xi}{\xi_x}^2+e^{2\epsilon a}(u_1^*{u_0}^2+2|u_0|^2u_1)+e^{2\epsilon c}(u_1|v_0|^2+u_0v_1v_0^*$$
$$+u_0v_0v_1^*)]+i\epsilon(a_t+ib_t)u_0+\epsilon(a_{xx}+ib_{xx})u_0+i\epsilon u_0+i\xi_t u_{0\xi}$$
$$+\xi_{xx}u_{0\xi}+2\epsilon(a_x+ib_x)\xi_x u_{0\xi}+2\xi_x\tau_x u_{0\xi\tau}+\tau_{xx}u_{0\tau}=0, \tag{3.16}$$

$$\epsilon[iv_{1\tau}\tau_t+v_{1\xi\xi}{\xi_x}^2+e^{2\epsilon c}(v_1^*{v_0}^2+2|v_0|^2v_1)+e^{2\epsilon a}(v_1|u_0|^2+v_0u_1u_0^*$$
$$+v_0u_0u_1^*)]+i\epsilon(c_t+id_t)v_0+\epsilon(c_{xx}+id_{xx})v_0+i\epsilon v_0+i\xi_t v_{0\xi}$$
$$+\xi_{xx}v_{0\xi}+2\epsilon(c_x+id_x)\xi_x v_{0\xi}+2\xi_x\tau_x v_{0\xi\tau}+\tau_{xx}v_{0\tau}=0. \tag{3.17}$$

我们知道，方程组 (3.15) 中的场量 u_0 和 v_0 不显含 ϵ，所以变量 ξ,τ 应满足关系式：

$$\xi_x=e^{\epsilon a}=e^{\epsilon c}\ \ \text{和}\ \ \tau_t=e^{2\epsilon a}=e^{2\epsilon c}. \tag{3.18}$$

解之得 $a=c$。这样，方程组 (3.15) 化为无微扰的 CNLSE(不过此时，方程组以 ξ,τ 为变量)：

$$iu_{0\tau}+u_{0\xi\xi}+(|u_0|^2+|v_0|^2)u_0=0,$$
$$iv_{0\tau}+v_{0\xi\xi}+(|v_0|^2+|u_0|^2)v_0=0. \tag{3.19}$$

从展开式 (3.10) 我们知道，u_1 和 v_1 正是 CNLSE (3.19) 的对称，即它们是方程组 (3.19) 的线性化方程组

$$iu_{1\tau} + u_{1\xi\xi} + u_1^* {u_0}^2 + 2|u_0|^2 u_1 + u_1|v_0|^2 + u_0 v_1 v_0^* + u_0 v_0 v_1^* = 0,$$

$$iv_{1\tau} + v_{1\xi\xi} + v_1^* {v_0}^2 + 2|v_0|^2 v_1 + v_1|u_0|^2 + v_0 u_1 u_0^* + v_0 u_0 u_1^* = 0 \tag{3.20}$$

的解。它的最简单的两个解可以表示成 [88]：

$$u_1 = u_{0\xi},\ v_1 = v_{0\xi} \ \text{和} \ u_1 = u_{0\tau},\ v_1 = v_{0\tau}. \tag{3.21}$$

给定一个非平凡解 u_0 和 v_0，方程组 (3.16)， (3.17)， (3.18) 和 (3.20) 对于任意 x 和 t 都是相容的，所以方程组 (3.16) 和 (3.17) 中其他项的系数应全部为零，即

$$b_{xx} + a_t + 1 = 0,\quad a_{xx} - b_t = 0, \tag{3.22}$$

$$\xi_{xx} + 2\epsilon a_x \xi_x = 0,\quad \xi_t + 2\epsilon b_x \xi_x = 0,\quad \tau_x = 0, \tag{3.23}$$

$$d_{xx} + c_t + 1 = 0,\quad c_{xx} - d_t = 0, \tag{3.24}$$

$$\xi_{xx} + 2\epsilon c_x \xi_x = 0,\quad \xi_t + 2\epsilon d_x \xi_x = 0,\quad \tau_x = 0. \tag{3.25}$$

解方程组 (3.22)-(3.25) 和 (3.18)，得到参量 a, b, c, d, ξ, τ 的表达式如下：

$$a = c = -2t,\quad b = \frac{1}{2}x^2 + c_1,$$

$$d = \frac{1}{2}x^2 + c_2,\quad \xi = xe^{-2\epsilon t},\quad \tau = \frac{1 - e^{-4\epsilon t}}{4\epsilon}. \tag{3.26}$$

其中 c_1, c_2 均为任意实常数。

这样，微扰的 CNLSE(3.9) 的近似解可以表示成:

$$u = e^{-\epsilon(2t - i\frac{x^2}{2})}(u_0 + \epsilon u_1),$$

$$v = e^{-\epsilon(2t - i\frac{x^2}{2})}(v_0 + \epsilon v_1). \tag{3.27}$$

其中我们取 $c_1 = c_2 = 0$。

2 微扰对孤子的影响

到目前为止人们已经找到了无微扰的 CNLSE(3.19) 的各种各样的解的形式，尤其是孤立子解，包括单孤立子解和多孤立子解等。而近似解 (3.27) 中的一级修正 u_1 和 v_1 则可以由 (3.21) 式确定。在此基础上，本节中我们将结合微扰 CNLSE 在非线性光学中的应用来讨论损耗项 $-i\epsilon u$ 和 $-i\epsilon v$ 对孤子的各个参数产生的影响。

从第一章中对 (1+1) 维 NLSE 的近似解的分析中我们已经知道，解 (3.27) 中的零阶解 u_0 和 v_0 也可以是无微扰的 CNLSE(3.19) 的任意一个精确解，而一阶修正 u_1 和 v_1 则可以是 (3.19) 式的任意一个对称。图 3-1 描述了 CNLSE

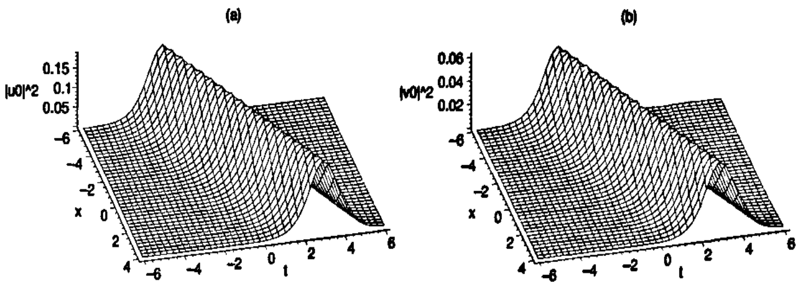


图 3-1: 参数取 $p=0.5$, $q=\gamma_0=\delta=1$, $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\zeta_0=0$ 时，

单孤立波 (3.5) 的强度 (a)$|u_0|^2$ 和 (b)$|v_0|^2$ 随时间的演化图.

Fig.3-1: Evolution of intensity profile (a)$|u_0|^2$ and (b)$|v_0|^2$ of one-soliton solutions of CNLSE. The parameters are fixed at $p=0.5$, $q=\gamma_0=\delta=1$, $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\zeta_0=0$.

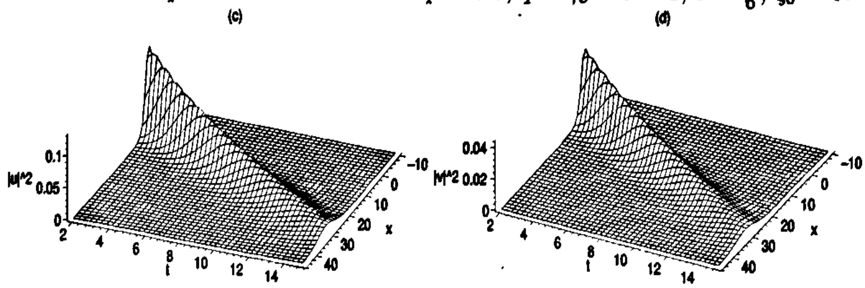


图 3-2: 零阶解 u_0 和 v_0 取与上图相同形式时，

微扰 CNLSE 的解 (3.27) 的模方 (c)$|u|^2$ 和 (d)$|v|^2$ 随时间的演化图.

Fig.3-2: Evolution of intensity profile (c)$|u|^2$ and (d)$|v|^2$ of solution of perturbed CNLSE with $\epsilon=0.08$. The u_0 and v_0 in (3.27) are the same as those in Fig.3-1.

的单孤立波的强度 (a)$|u_0|^2$ 和 (b)$|v_0|^2$ 随时间的演化情况。此时，两列孤立波分别沿着各自的 x 轴作稳定传播而不改变波的形状、传播速度和方向，它们的高度、传播速度、初始位置和初始相位分别由 p、q、γ_0、ζ_0 等参数决定。当有微扰作用时 (见图 3-2)，孤立波的强度随时间的演化与 (1+1) 维 NLSE 的情况非常类似。此时，孤子的振幅和能量都随时间的增加而指数衰减直至零。微扰参数 ϵ 值越大，衰减得也就越快。另外，由于微扰 $-i\epsilon u$ 和 $-i\epsilon v$ 的影响，孤立子的相位和波数等也都发生了相应的改变。 它们的具体形式可以通过近似

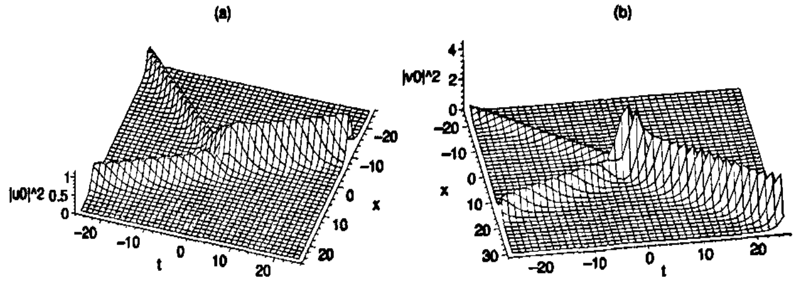


图 3-3: 非弹性碰撞的双孤立波的强度 (a)$|u_0|^2$ 和 (b)$|v_0|^2$ 的演化图.

参数取 $k_1 = 0.5 + 0.5i,\ k_2 = 0.55 - 0.25i,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \eta_{10} = \eta_{20} = 0.$

Fig.3-3: Evolution of intensity profile (a)$|u_0|^2$ and (b)$|v_0|^2$ of two-soliton solutions of CNLSE. The parameters are fixed at $k_1 = 0.5 + 0.5i,\ k_2 = 0.55 - 0.25i,$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \eta_{10} = \eta_{20} = 0.$

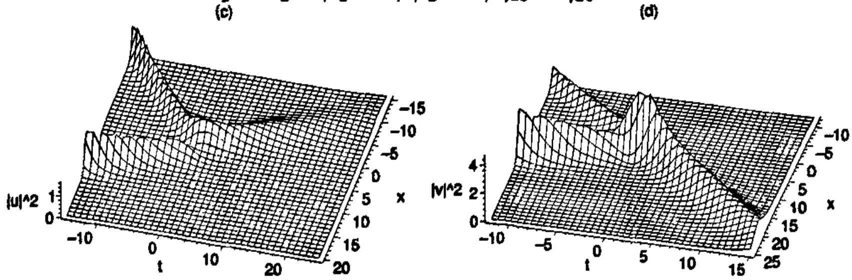


图 3-4: 零阶解 u_0 和 v_0 取与上图相同形式时，

微扰 CNLSE 的解 (3.27) 的模方 (c)$|u|^2$ 和 (d)$|v|^2$ 的演化图.

Fig.3-4: Evolution of intensity profile (c)$|u|^2$ and (d)$|v|^2$ of solution of perturbed CNLSE with $\epsilon = 0.02$, and u_0 and v_0 in (3.27) are the same as those in Fig.3-3.

解 (3.27) 详细地表示出来，有兴趣的读者可参见第二章。但是值得指出的是，孤立波始终以速度 $\sqrt{2}p$ 传播而不发生变化。

图 3-3 给出非弹性碰撞的双孤波的强度 (a)$|u_0|^2$ 和 (b)$|v_0|^2$ 随时间的演化图。在初始情况下，两孤立子沿着坐标轴稳定地传播，它们的能量也分别分布在两个孤立子上而没有发生任何变化。但是由于交叉调制项 $|u|^2v$ 和 $|v|^2u$ 的作用，两孤子逐渐靠近并发生碰撞，此时两孤子上的能量不再分裂而全都集中在了一个孤立子上。经过简单的计算后将发现，孤子的能量在整个碰撞过程中

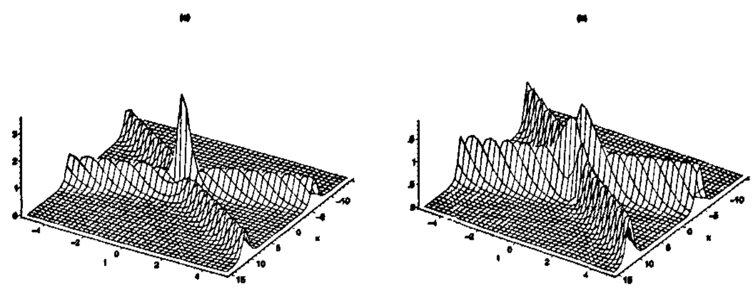


图 3-5: 参数取 $k_1 = 1 + i,\ k_2 = 1 - 0.5i,\ \alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1.5,\ \eta_{10} = \eta_{20} = 0$ 时，弹性碰撞的双孤立波的强度 (a)$|u_0|^2$ 和 (b)$|v_0|^2$ 的演化图.

Fig.3-5: Evolution of intensity profile (a)$|u_0|^2$ and (b)$|v_0|^2$ of two-soliton solutions of CNLSE. The parameters are fixed at $k_1 = 1 + i,\ k_2 = 1 - 0.5i$, $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1,\ \eta_{10} = \eta_{20} = 0$.

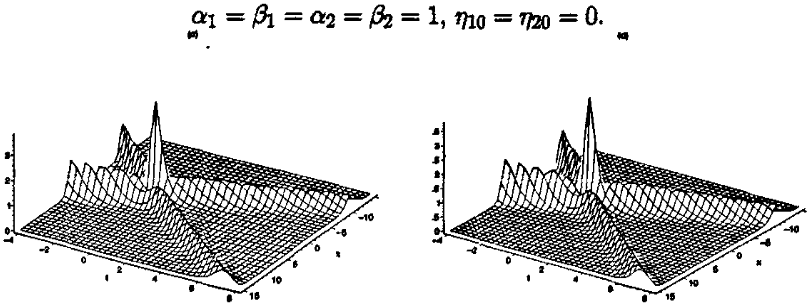


图 3-6: 取与上图相同形式的 u_0 和 v_0 时，微扰 CNLSE 的解的模方 (c)$|u|^2$ 和 (d)$|v|^2$ 随时间的演化图.

Fig.3-6: Evolution of intensity profile (c)$|u|^2$ and (d)$|v|^2$ of solution of perturbed CNLSE with $\epsilon = 0.08$. The u_0 and v_0 in (3.27) are the same as those Fig.3-5.

始终守恒。这一性质在文献 [86] 中有详细描述。不过无论在碰撞前还是碰撞后，孤立波都沿着 x 轴传播而保持各自的高度和速度不变。当存在线性损耗项时 (见图 3-4)，两孤立波的强度随着时间的演化而不断衰减直至零，ϵ 值越大，衰减得也越快。

图 3-5 和图 3-6 分别表示 CNLSE 的弹性碰撞的双孤立波的强度演化图和微扰 CNLSE 的两孤子解的模方随时间的演化图。当没有微扰作用时，无论是碰撞前还是碰撞后两孤立波随着时间的增加而稳定传播。与非弹性碰撞情况不同的是，此时，孤子能量在碰撞后不是集中在一个孤子上，而是重新又分布在两个孤子上，且各自的能量保持与碰撞前的一致而不发生任何转移和交换。当有微扰项 $-i\epsilon u$ 和 $-i\epsilon v$ 的作用时，两孤子的强度都将随着时间的增加而持续衰减直至零。而且此时两孤立子的能量只是各自衰减，原来均匀分布在两孤子上的能量不会因为有微扰影响而重新分布，也就是说，孤立子的碰撞性质不会因为微扰的作用而发生变化。

为了进一步检验直接微扰方法的有效性，我们采用分步傅立叶方法对微扰 CNLSE(3.1) 进行了数值模拟。结果如图 3-7 所示。图中实线表示利用直接微扰方法得到的近似的解析解；虚线为数值结果。图 3-7 中 (a) 表示取不同 ϵ 值时，微扰 CNLSE 的单孤子解的振幅随时间的演化图。近似解 (3.27) 中的零阶解 u_0 由 (3.4) 式给定，其中参数为 $p=q=0.5$，$\theta=\pi/4$，$\delta=\gamma_0=\zeta_0=0$，且取一阶修正 $u_1=u_{0\xi}$。从图中可以观察到：当 $\epsilon=0.01$，解析解与数值解几乎完全重合。随着 ϵ 值的增加，两者之间的差距也逐渐增加。不过在相当大的 ϵ 值范围内，解析解与数值解吻合得相当好。例如当 $\epsilon=0.1$，解析解与数值解之间的绝对误差仅为 0.0012。

图 3-7(b) 描述双孤子解的振幅随时间演化的情况。为简单起见，这里我们选择以等幅的两孤子为例来说明情况，此时，能量平均地分布在两孤子上，所以它们的振幅可以由共同的一条曲线完全确定。零级解 u_0 由 (3.7)-(3.8) 式给定，并取参数为 $k_1=1+i$, $k_2=1-0.5i$, $\alpha_1=\beta_1=\eta_{10}=1$, $\alpha_2=\beta_2=\sqrt{2}/2$, $\eta_{20}=2$ 以及一阶修正 $u_1=u_{0\xi}$。碰撞前后，解析解和数值解的振幅十分吻合，ϵ 值越小，两者符合得越好。然而从图中也不难发现，解析

解和数值解的碰撞时刻并不相同：后者的碰撞时刻要超前于前者的。特别地，在碰撞时刻解析解和数值解的振幅也有明显的差别：随着 ϵ 值的增加，解析解在碰撞时刻的振幅并没有发生明显的变化。而数值结果却显示，解的振幅随着 ϵ 的增加而明显减小。

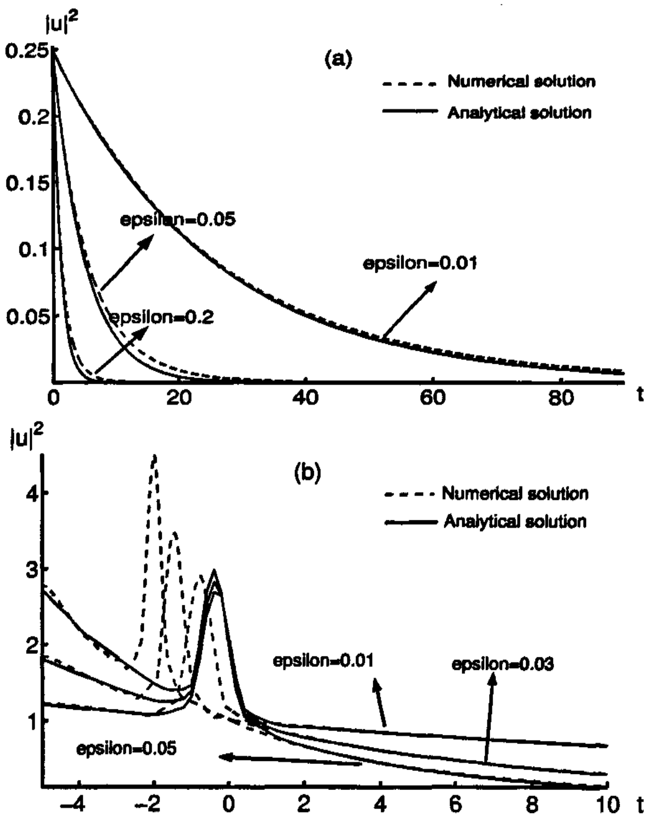


图 3-7: 取不同的 ϵ 值时，孤子的振幅随时间的演化图.(a) 单孤子 (b) 两孤子. 实线和虚线分别表示解析解和数值解的振幅.

Fig.3-7: The time evolution of amplitudes of solutions with different ϵ values. (a)one-soliton; (b)two-soliton. The solid lines are from analytical calculations, and the dashed ones are from numerical simulations.

(二) 多分量耦合非线性薛定谔方程

通过上一节对微扰的两分量耦合的非线性薛定谔方程的近似求解中不难发现，楼的直接微扰方法也可用于处理多分量耦合的非线性薛定谔方程的微扰问题。

考虑微扰的多分量耦合非线性薛定谔方程:

$$iE_{mx} + c_m E_{mtt} + 2\alpha_{mm}|E_m|^2 E_m + 2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^{N} \alpha_{ml}|E_l|^2 E_m = -i\epsilon E_m.$$

$$\alpha_{ml} = \alpha_{lm}, \qquad (m, l = 1, 2, \cdots N) \tag{3.28}$$

该方程在实际物理问题中已经得到广泛应用 [77]。如在非线性光学中，方程 (3.28) 中 E_m 为光纤的第 m 个模式的慢变化振幅，x, t 分别为无量纲化后波的传播距离和时间，参数 c_m 表示色散系数，α_{mm} 为波包的自相位调制系数，α_{ml} 描述交叉相位调制系数。微扰项 $-i\epsilon E_m$ 表示光纤中的线性损耗，其中 ϵ 为描述微扰强度的小参量。当 $\epsilon = 0$，方程 (3.28) 退化为无微扰的多分量耦合方程组

$$iE_{mx} + c_m E_{mtt} + 2\alpha_{mm}|E_m|^2 E_m + 2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^{N} \alpha_{ml}|E_l|^2 E_m = 0. \tag{3.29}$$

一般地，多分量 CNLSE(3.29) 是不可积的，即它不能由 IST 精确求解。不过在文献 [84] 中作者采用 Painlevé 分析法对方程 (3.29) 进行可积性研究。他们发现，当 (3.29) 中的各参量满足以下条件时，该方程是可积的:

(1). $c_j = c,\ (j = 1, 2 \ldots N) \qquad \alpha_{ls} = \alpha.\ (l, s = 1, 2 \ldots N)$

(2). $-c_i = c_j = c,\ (i \neq j,\ j = 1, 2 \ldots N)$

$\alpha_{ls} = (-1)^{\delta_{li}}(-1)^{\delta_{si}}\alpha.\ (l, s = 1, 2 \ldots N)$

其中 $i = 1, 2 \ldots N$ (每个 i 只能取一次)

(3). $-c_{i_1} = -c_{i_2} = c_j = c,\ (i_1 \neq i_2 \neq j,\ j = 1, 2 \ldots N)$

$\alpha_{ls} = [(-1)^{\delta_{li_1}}(-1)^{\delta_{si_1}}(-1)^{\delta_{li_2}}(-1)^{\delta_{si_2}}]\alpha.\ (l, s = 1, 2 \ldots N)$

其中 $i_1,\ i_2 = 1, 2 \ldots N \quad (i_1 < i_2)$ (每组 $(i_1,\ i_2)$ 只能取一次)

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

(n). $-c_{i_1} = -c_{i_2} = \ldots = -c_{i_{n-1}} = c_j = c,$

$(j \neq i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_{n-1},\ j = 1, 2 \ldots N)$

$\alpha_{ls} = [(-1)^{\delta_{li_1}}(-1)^{\delta_{si_1}} \ldots (-1)^{\delta_{li_{n-1}}}(-1)^{\delta_{si_{n-1}}}]\alpha.\ \ (l, s = 1, 2 \ldots N)$

其中 $i_1,\ i_2,\ \ldots, i_{n-1} = 1, 2 \ldots N \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1})$

(每组 $(i_1,\ i_2,\ \ldots, i_{n-1})$ 只能取一次)

(n+1). $-c_{i_1} = -c_{i_2} = \ldots = -c_{i_n} = c_j = c,$

$(j \neq i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n,\ \ j = 1, 2 \ldots N)$

$\alpha_{ls} = [(-1)^{\delta_{li_1}}(-1)^{\delta_{si_1}} \ldots (-1)^{\delta_{li_n}}(-1)^{\delta_{si_n}}]\alpha.\ \ (l, s = 1, 2 \ldots N)$

其中 $i_1,\ i_2,\ \ldots, i_n = 1, 2 \ldots N \quad (i_1 < i_2 < \ldots < i_n)$

(每组 $(i_1,\ i_2,\ \ldots, i_n)$ 只能取一次)

其中若 N 为偶数，$n = N/2$；若 N 为奇数，则 $n = (N-1)/2$，δ_{ij} 满足

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

另外，人们也运用各种求解非线性偏微分方程的方法获得了它的丰富的孤立子解 [89, 90]。

1 近似解

利用直接微扰方法，将 E_m 展开成:

$$E_m = e^{\epsilon(a_m + ib_m)}(p_m(\xi,\ \tau) + \epsilon q_m(\xi,\ \tau) + \cdots). \qquad (m = 1, 2, \cdots N) \tag{3.30}$$

其中

$$a_m \equiv a_m(x,t),\quad b_m \equiv b_m(x,t),\quad \xi \equiv \xi(x,t,\epsilon),\quad \tau \equiv \tau(x,t,\epsilon)$$

均为待定的实函数。

利用直接微扰方法，得到相容性条件:

$$\xi_x = e^{\epsilon a} = e^{\epsilon c},\quad \tau_t = e^{2\epsilon a} = e^{2\epsilon c}.$$

$$ia_x - b_{mx} + c_m a_{tt} + ic_m b_{mtt} + i = 0,\quad \xi_t \tau_t = 0,$$

$$2c_m \epsilon a_t \tau_t + 2ic_m \epsilon b_{mt} \tau_t + i\tau_x + c_m \tau_{tt} = 0. \tag{3.31}$$

经过简单的运算，不难求得:

$$a=-2x,\quad b_m=t^2/2c_m,$$

$$\xi=(1-e^{-4\epsilon x})/4\epsilon,\quad \tau=te^{-2\epsilon x}. \tag{3.32}$$

于是，方程组 (3.28) 的近似解可表示成:

$$E_m=e^{-2\epsilon x+i\epsilon t^2/2c_m}(p_m+\epsilon q_m). \tag{3.33}$$

其中 p_m 为无微扰 CNLSE

$$iE_{m\xi}+c_mE_{m\tau\tau}+2\alpha_{mm}|E_m|^2E_m+2\sum_{\substack{l=1\\(l\neq m)}}^{N}\alpha_{ml}|E_l|^2E_m=0 \tag{3.34}$$

的任意一个精确解，q_m 是它的任意一个对称。

2 微扰对孤子的影响

根据文献 [86] 知，当 $c_m=c=1$, $\alpha_{lm}=\alpha\ (l,m=1,2\ldots N)$ 时，多分量 CNLSE(3.34) 有三孤子解:

$$\begin{aligned}p_j=&\frac{\beta_1^{(j)}e^{\eta_1}+\beta_2^{(j)}e^{\eta_2}+\beta_3^{(j)}e^{\eta_3}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\theta_{1j}}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\theta_{2j}}+e^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\theta_{3j}}}{D}\\&+\frac{e^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\theta_{4j}}+e^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_1+\theta_{5j}}+e^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\theta_{6j}}+e^{\eta_3+\eta_1^*+\eta_2+\theta_{7j}}+e^{\eta_3+\eta_2^*+\eta_1+\theta_{8j}}}{D}\\&+\frac{e^{\eta_2+\eta_3^*+\eta_1+\theta_{9j}}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\rho_{1j}}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_3^*+\eta_3+\rho_{2j}}+e^{\eta_1+\eta_3^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\rho_{3j}}}{D}.\\&(j=1,2,\cdots,N)\end{aligned} \tag{3.35}$$

其中,

$$\begin{aligned}D=&1+e^{\eta_1+\eta_1^*+R_1}+e^{\eta_2+\eta_2^*+R_2}+e^{\eta_3+\eta_3^*+R_3}+e^{\eta_1+\eta_2^*+\nu_{10}}\\&+e^{\eta_2+\eta_1^*+\nu_{10}^*}+e^{\eta_1+\eta_3^*+\nu_{20}}+e^{\eta_3+\eta_1^*+\nu_{20}^*}+e^{\eta_2+\eta_3^*+\nu_{30}}\\&+e^{\eta_3+\eta_2^*+\nu_{30}^*}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+R_4}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\eta_3^*+R_5}\\&+e^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\eta_2^*+R_6}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_3^*+\omega_{10}}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_3+\eta_2^*+\omega_{10}^*}\end{aligned}$$

$$+e^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_1+\eta_3^*+\omega_{20}}+e^{\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\eta_1^*+\omega_{20}^*}+e^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_1+\eta_2^*+\omega_{30}}$$

$$+e^{\eta_3+\eta_3^*+\eta_2+\eta_1^*+\omega_{30}^*}+e^{\eta_1+\eta_1^*+\eta_2+\eta_2^*+\eta_3+\eta_3^*+R_7}. \tag{3.36}$$

这里，

$$\eta_i=k_j(\tau+ik_j\xi),\quad j=1,2,3,\qquad e^{\theta_{1j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{21}-\beta_2^{(j)}\kappa_{11})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)},$$

$$e^{\theta_{2j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{31}-\beta_3^{(j)}\kappa_{11})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_3)},\qquad e^{\theta_{3j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{22}-\beta_2^{(j)}\kappa_{12})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_2)},$$

$$e^{\theta_{4j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{32}-\beta_3^{(j)}\kappa_{22})}{(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)},\qquad e^{\theta_{5j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{33}-\beta_3^{(j)}\kappa_{13})}{(k_3+k_3^*)(k_3^*+k_1)},$$

$$e^{\theta_{6j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{33}-\beta_3^{(j)}\kappa_{23})}{(k_2+k_3^*)(k_3^*+k_3)},\qquad e^{\theta_{7j}}=\frac{(k_2-k_3)(\beta_2^{(j)}\kappa_{31}-\beta_3^{(j)}\kappa_{21})}{(k_3+k_1^*)(k_1^*+k_3)},$$

$$e^{\theta_{8j}}=\frac{(k_1-k_3)(\beta_1^{(j)}\kappa_{32}-\beta_3^{(j)}\kappa_{12})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_3)},\qquad e^{\theta_{9j}}=\frac{(k_1-k_2)(\beta_1^{(j)}\kappa_{23}-\beta_2^{(j)}\kappa_{13})}{(k_1+k_3^*)(k_2^*+k_3)},$$

$$e^{\rho_{1j}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_2^*-k_1^*)}{(k_1+k_1^*)(k_2+k_2^*)(k_1^*+k_2)(k_1^*+k_3)(k_2^*+k_3)(k_2^*+k_1)}$$

$$\times[\beta_1^{(j)}(\kappa_{21}\kappa_{32}-\kappa_{22}\kappa_{31})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{12}\kappa_{31}-\kappa_{32}\kappa_{11})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})],$$

$$e^{\rho_{2j}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3^*-k_1^*)}{(k_1+k_1^*)(k_3+k_3^*)(k_1^*+k_2)(k_1^*+k_3)(k_3^*+k_2)(k_3^*+k_1)}$$

$$\times[\beta_1^{(j)}(\kappa_{21}\kappa_{33}-\kappa_{23}\kappa_{31})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{13}\kappa_{31}-\kappa_{33}\kappa_{11})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})],$$

$$e^{\rho_{3j}}=\frac{(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)(k_3^*-k_2^*)}{(k_2^*+k_1)(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3^*+k_2)(k_3^*+k_3)}$$

$$\times[\beta_1^{(j)}(\kappa_{22}\kappa_{33}-\kappa_{23}\kappa_{32})+\beta_2^{(j)}(\kappa_{13}\kappa_{32}-\kappa_{33}\kappa_{12})+\beta_3^{(j)}(\kappa_{12}\kappa_{23}-\kappa_{22}\kappa_{13})],$$

$$e^{R_7}=\frac{|k_1-k_2|^2|k_2-k_3|^2|k_3-k_1|^2}{(k_1+k_1^*)(k_2+k_2^*)(k_3+k_3^*)|k_1+k_2^*|^2|k_2+k_3^*|^2|k_3+k_1^*|^2}$$

$$\times[(\kappa_{11}\kappa_{22}\kappa_{33}-\kappa_{11}\kappa_{23}\kappa_{32})+(\kappa_{12}\kappa_{23}\kappa_{31}-\kappa_{12}\kappa_{33}\kappa_{21})+(\kappa_{13}\kappa_{21}\kappa_{32}-\kappa_{31}\kappa_{22}\kappa_{13})],$$

$$e^{R_m}=\frac{\kappa_{mm}}{k_m+k_m^*},\quad m=1,2,3\qquad e^{\nu_{10}}=\frac{\kappa_{12}}{k_1+k_2^*},$$

$$e^{\nu_{20}}=\frac{\kappa_{13}}{k_1+k_3^*},\qquad e^{\nu_{30}}=\frac{\kappa_{23}}{k_2+k_3^*},$$

$$e^{R_4}=\frac{(k_2-k_1)(k_2^*-k_1^*)(\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{21})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)(k_1+k_2^*)(k_2+k_2^*)},$$

$$e^{R_5} = \frac{(k_3-k_1)(k_3^*-k_1^*)(\kappa_{33}\kappa_{11}-\kappa_{13}\kappa_{31})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3+k_3^*)},$$

$$e^{R_6} = \frac{(k_3-k_2)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{33}\kappa_{22}-\kappa_{23}\kappa_{32})}{(k_2+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_2+k_3^*)(k_3+k_3^*)},$$

$$e^{\omega_{10}} = \frac{(k_2-k_1)(k_3^*-k_1^*)(\kappa_{11}\kappa_{23}-\kappa_{13}\kappa_{21})}{(k_1+k_1^*)(k_1^*+k_2)(k_1+k_3^*)(k_2+k_3^*)},$$

$$e^{\omega_{20}} = \frac{(k_1-k_2)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{13}\kappa_{22}-\kappa_{12}\kappa_{23})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_2)(k_1+k_3^*)(k_2+k_3^*)},$$

$$e^{\omega_{30}} = \frac{(k_3-k_1)(k_3^*-k_2^*)(\kappa_{33}\kappa_{12}-\kappa_{13}\kappa_{32})}{(k_1+k_2^*)(k_2^*+k_3)(k_1+k_3^*)(k_3+k_3^*)},$$

$\kappa_{il} = \frac{\alpha \sum_{n=1}^{3} \beta_i^{(n)}\beta_l^{(n)*}}{k_i+k_l^*}$ $(i,l=1,2,3)$。k_i 和 $\beta_i^{(j)}(i=1,2,3,\ j=1,2,\cdots,N)$ 为 $3(N+1)$ 个任意的复常数。

(a) (b)

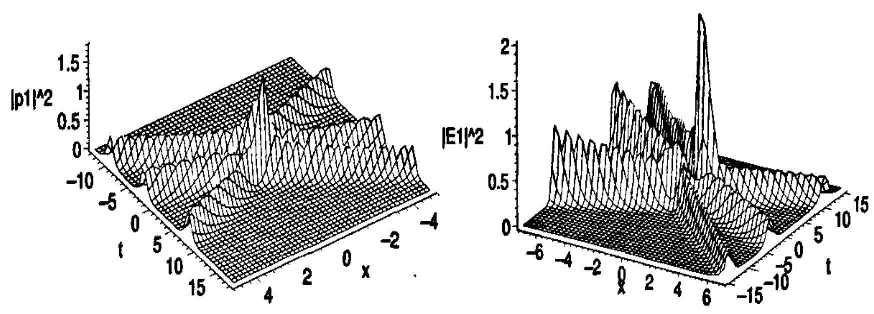


图 3-8: 三分量耦合非线性薛定谔方程组 (3.29) 的三孤立波的强度 (a)$|p_1|^2$ 演化图和相应的微扰方程组 (3.28) 的解的模方 (b) $|E_1|^2$ 随时间的演化图. 参数 $k_1=1.2+0.5i$, $k_2=1.2-0.5i$, $k_3=1.2-i$, $\epsilon=0.02$, $c_1=c_2=\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=1$,
$\beta_1^{(1)}=\beta_1^{(3)}=\beta_2^{(1)}=\beta_2^{(3)}=\beta_1^{(2)}=\beta_2^{(2)}=\beta_3^{(1)}=\beta_3^{(3)}=\beta_3^{(2)}=1$.

Fig.3-8: Evolution of intensity profile (a)$|p_1|^2$ of three-soliton solutions of CNLSE for N=3 and the evolution of intensity profile (b)$|E_1|^2$ of solution of perturbed CNLSE with $\epsilon=0.02$. The parameters are $k_1=1.2+0.5i$, $k_2=1.2-0.5i$, $k_3=1.2-i$,
$c_1=c_2=\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{21}=\alpha_{22}=1$,
$\beta_1^{(1)}=\beta_1^{(3)}=\beta_2^{(1)}=\beta_2^{(3)}=\beta_1^{(2)}=\beta_2^{(2)}=\beta_3^{(1)}=\beta_3^{(3)}=\beta_3^{(2)}=1$.

图 3-8(a) 给出了三分量耦合非线性薛定谔方程组的三孤立波的强度演化图 (由于 $|p_2|^2$ 和 $|E_2|^2$ 的演化情形与 $|p_1|^2$ 和 $|E_1|^2$ 的非常相似，在此不再赘述)。相应的微扰 CNLSE(3.28) 的解的模方的演化如图 3-8(b)。取解 (3.33) 中的 p_1 如式 (3.35)，一阶修正 q_1 由 $q_1 = p_{1\tau}$ 给定。在微扰项 $-i\epsilon E_{1,2}$ 的作用下三个孤子的振幅和能量都将随着 x 的增加而逐渐衰减，而且微扰参量 ϵ 越大，衰减得越快。

(三) (2+1) 维非线性薛定谔方程

(2+1) 维非线性薛定谔方程

$$iu_z + \Delta_\perp u + |u|^2 u = 0, \quad \Delta_\perp = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \tag{3.37}$$

表示激光束在含有 Kerr 非线性介质中传输的最简单的模型。其中 u 为电场包络，z 为波传播方向的轴向距离，$\Delta_\perp$ 为横向拉普拉斯算符，它的作用是产生横向波矢 $k_\perp$，导致衍射效应，(x, y) 表示横向平面的坐标。等号左端第三项是非线性项。我们知道，该模型不能用 IST 精确求解。且 (2+1) 维 NLSE 的解可能呈现为一有限时间爆发或一“自聚焦”的奇异性。通常，此奇异性在对称坐标下研究：

$$i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r}) + u|u|^2 = 0, \quad u = u(r, z), \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2)}. \tag{3.38}$$

扎哈罗夫 (Zakharov) 等人发现，当选取合适的初始条件 $u(r, 0)$，在能量小于零时会导致惯量矩在有限时间内消失 (在守恒律意义下)，结果形成坍缩 (爆发)，这一方面的详细内容可以参见文献 [91] 及相关的参考文献。

在研究二维 NLSE 时，大多数的处理方法是作变量代换将它们化为一维情况，这在数学上是可以的，但在物理学上有时是不允许的。W.H.Hui，M.Tajiri，A.Nakamura 等人却采取了一种简单解法对 (2+1) 维 NLSE 进行了研究并得到

了它的如下形式的准孤立子解 [92]：

$$u = \pm\frac{1}{z}e^{i(\frac{x^2}{4z}+\frac{y^2}{4z}-\frac{\omega}{z})}\begin{cases}\sqrt{2\omega}\text{sech}\sqrt{\frac{\omega}{1+c_1^2}}(\frac{x}{z}-c_1\frac{y}{z}-\zeta_0), \\ \quad 当(\frac{\omega}{1+c_1^2}>0,\ \ \frac{1}{1+c_1^2}>0) \\ \sqrt{\omega}\tanh\sqrt{\frac{-\omega}{2+2c_1^2}}(\frac{x}{z}-c_1\frac{y}{z}-\zeta_0). \\ \quad (当\frac{\omega}{1+c_1^2}<0,\ \ \frac{1}{1+c_1^2}<0)\end{cases} \tag{3.39}$$

其中 ω, c_1 为任意常数。根据文献 [91]，我们知道方程 (3.37) 有径向对称的波导解：

$$u(z,r) = e^{iz}R(r),$$

其中 R 满足非线性边界值问题：

$$\triangle_\perp R - R + R^3 = 0, \quad R'(0) = 0, \quad \triangle_\perp = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}).$$

该常微分方程有很多组解，其中最吸引人的是 Townes 孤子解，具体可参见文献 [93]。

最近，由于 Bolti 等人的开拓性工作，(2+1) 维 NLSE 的 dromion 解也引起了人们的关注: 阮航宇等人采用分离变量方法研究了 (2+1) 维非 NLSE 的局域结构。他们认为只要选择合适的任意函数，局域解可以是 dromion 解，环孤子解，呼吸子和瞬子等 [94]。另外，他们还研究了该模型的 Painlevé 性质，得到了它的无穷多个对称及它的精确解 [95]。

1 近似解

这一节中，我们将考虑含有时间色散的 (2+1) 维 NLSE

$$iu_z + u_{xx} + u_{yy} + |u|^2u + \epsilon u_{tt} = 0. \tag{3.40}$$

它是描述在含有瞬时 Kerr 非线性介质中传输的超短激光脉冲的基本模型 [96, 97]。其中

$$\epsilon = \frac{r_0^2 k_0 k_{\omega\omega}}{T_2}.$$

式中，r_0 表示初始脉冲的半径，波数 $k_0 = \omega n_0(\omega)/c$，$n_0$ 为线性折射率，c 和 T 分别代表光速和脉冲持续时间。若小参量 $\epsilon > 0$，为正常色散，若 $\epsilon < 0$，则为反常色散。当 $\epsilon = 0$，方程 (3.40) 退化为 (2+1) 维 NLSE(3.37)。

利用直接微扰方法，将式 (3.40) 中 u 展开成：

$$u = e^{\epsilon(a+ib)}u'(\xi,\eta,\zeta,\tau,\epsilon)$$

$$= e^{\epsilon(a+ib)}(u_0(\xi,\eta,\zeta,\tau) + \epsilon u_1(\xi,\eta,\zeta,\tau) + O(\epsilon^2)), \tag{3.41}$$

其中

$$a \equiv a(x,y,z,t),\ b \equiv b(x,y,z,t),\ \xi \equiv \xi(x,y,z,t,\epsilon),$$

$$\eta \equiv \eta(x,y,z,t,\epsilon),\ \zeta \equiv \zeta(x,y,z,t,\epsilon),\ \tau \equiv \tau(x,y,z,t,\epsilon) \tag{3.42}$$

均为待定的实函数。并且 ξ,η,ζ,τ 有以下的性质：

$$\{\xi,\eta,\zeta,\tau\} \xrightarrow{\epsilon\to 0} \{x,y,z,t\}, \tag{3.43}$$

使得 $\epsilon \to 0$ 时，u_0 为无微扰的 (2+1) 维 NLSE 的准确解。

将式 (3.41) 代入微扰方程 (3.40)，得到

$$\begin{aligned}
& iu_{0\zeta}\zeta_z + u_{0\xi\xi}{\xi_x}^2 + u_{0\eta\eta}{\eta_y}^2 + e^{2\epsilon a}{u_0}^2{u_0}^* \\
& + i\epsilon u_{1\zeta}\zeta_z + \epsilon u_{1\xi\xi}{\xi_x}^2 + \epsilon u_{1\eta\eta}{\eta_y}^2 + e^{2\epsilon a}(\epsilon {u_0}^2{u_1}^* + 2\epsilon u_0 u_1 {u_0}^*) \\
& + \epsilon\{(i(a_z + ib_z) + (a_{xx} + ib_{xx}) + (a_{yy} + ib_{yy}))u_0 \\
& + (i\frac{\xi_z}{\epsilon} + 2(a_x + ib_x)\xi_x + \frac{\xi_{xx} + \xi_{yy}}{\epsilon})u_{0\xi} \\
& + (i\frac{\eta_z}{\epsilon} + 2(a_y + ib_y)\eta_y + \frac{\eta_{xx} + \eta_{yy}}{\epsilon})u_{0\eta} \\
& + (i\frac{\tau_z}{\epsilon} + \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{\epsilon})u_{0\tau} + \frac{1}{\epsilon}(\zeta_{xx} + \zeta_{yy})u_{0\zeta} \\
& + \frac{1}{\epsilon}(2u_{0\xi\tau}\xi_x\tau_x + 2u_{0\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2u_{0\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + 2u_{0\xi\eta}\xi_y\eta_y \\
& + 2u_{0\tau\eta}\tau_y\eta_y + 2u_{0\eta\zeta}\eta_y\zeta_y) - u_{0\tau\tau}\tau_t^2\} = O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

由于 ξ,η,ζ,τ 有如 (3.43) 式的性质，我们认为 ξ_y, ξ_z, ξ_t, ξ_{xx}, η_x, η_t, η_z, η_{yy}, ζ_x, ζ_y, ζ_t, τ_x, τ_y, τ_z 均为 ϵ 的一阶项。令近似方程 (3.44) 中 ϵ 的相同次幂的系数为零，得

$$iu_{0\zeta}\zeta_z + u_{0\xi\xi}{\xi_x}^2 + u_{0\eta\eta}{\eta_y}^2 + e^{2\epsilon a}{u_0}^2{u_0}^* = 0.$$

$$
\begin{aligned}
& i\epsilon u_{1\zeta}\zeta_z + \epsilon u_{1\xi\xi}{\xi_x}^2 + \epsilon u_{1\eta\eta}{\eta_y}^2 + e^{2\epsilon a}(\epsilon {u_0}^2 {u_1}^* + 2\epsilon u_0 u_1 {u_0}^*) \\
& +\epsilon\{(i(a_z + ib_z) + (a_{xx} + ib_{xx}) + (a_{yy} + ib_{yy}))u_0 \\
& +(i\frac{\xi_z}{\epsilon} + 2(a_x + ib_x)\xi_x + \frac{\xi_{xx} + \xi_{yy}}{\epsilon})u_{0\xi} \\
& +(i\frac{\eta_z}{\epsilon} + 2(a_y + ib_y)\eta_y + \frac{\eta_{xx} + \eta_{yy}}{\epsilon})u_{0\eta} \\
& +(i\frac{\tau_z}{\epsilon} + \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{\epsilon})u_{0\tau} + \frac{1}{\epsilon}(\zeta_{xx} + \zeta_{yy})u_{0\zeta} \\
& +\frac{1}{\epsilon}(2u_{0\xi\tau}\xi_x\tau_x + 2u_{0\xi\eta}\xi_x\eta_x + 2u_{0\xi\zeta}\xi_x\zeta_x + 2u_{0\xi\eta}\xi_y\eta_y \\
& +2u_{0\tau\eta}\tau_y\eta_y + 2u_{0\eta\zeta}\eta_y\zeta_y) - u_{0\tau\tau}\tau_t^2\} = O(\epsilon^2).
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

显然，方程 u_0 是不显含 ϵ 的函数，所以变量 ξ, η, ζ 应满足以下关系式:

$$
\zeta_z = e^{2\epsilon a},\ \xi_x = e^{\epsilon a},\ \eta_y = e^{\epsilon a}. \tag{3.46}
$$

而且复函数 u_0 为以下无微扰的 (2+1) 维 NLSE

$$
iu_{0\zeta} + u_{0\xi\xi} + u_{0\eta\eta} + |u_0|^2 u_0 = 0. \tag{3.47}
$$

的精确解。另外根据展开式 (3.41) 知，u_1 为方程 (3.47) 的对称，即是它的线性化方程

$$
iu_{1\zeta} + u_{1\xi\xi} + u_{1\eta\eta} + 2u_0 u_0^* u_1 + {u_0}^2 {u_1}^* = 0 \tag{3.48}
$$

的解。它的最简单的三个解的形式可以表示成 [95]:

$$
u_1 = u_{0\xi},\quad u_1 = u_{0\zeta},\quad u_1 = u_{0\eta}. \tag{3.49}
$$

给定一个非平凡解 u_0，方程 (3.45) 和 (3.48) 在任意空间 x, y, z 和时间 t 都是相容的，故方程 (3.45) 中的其他项都应等于零，即

$$
\begin{aligned}
& i(a_z + ib_z) + (a_{xx} + ib_{xx}) + (a_{yy} + ib_{yy}) = 0, \\
& i\frac{\xi_z}{\epsilon} + 2(a_x + ib_x)\xi_x + \frac{\xi_{xx} + \xi_{yy}}{\epsilon} = 0, \\
& i\frac{\eta_z}{\epsilon} + 2(a_y + ib_y)\eta_y + \frac{\eta_{xx} + \eta_{yy}}{\epsilon} = 0,
\end{aligned}
$$

$$i\tau_z+\tau_{xx}+\tau_{yy}=0,\quad \xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y=0,$$
$$\tau_t^2=0,\ \ \zeta_{xx}+\zeta_{yy}=0,\ \ \xi_x\zeta_x=0,$$
$$\xi_x\tau_x=0,\ \ \eta_y\zeta_y=0,\ \ \eta_y\tau_y=0. \tag{3.50}$$

解方程 (3.46) 和方程组 (3.50) 得

$$a=hz,\ \ b=-\frac{(x^2+y^2)}{4}h,$$
$$\xi=xe^{\epsilon zh},\ \ \eta=ye^{\epsilon zh},$$
$$\tau=C,\ \ \zeta=\frac{e^{2\epsilon zh}-1}{2\epsilon h}. \tag{3.51}$$

其中 $h\equiv h(t)$ 为关于时间 t 的任意函数，C 为任意常数。这样微扰方程 (3.40) 的近似解便可以写成:

$$u=e^{\epsilon(hz-i\frac{h(x^2+y^2)}{4})}(u_0(\xi(x,y,z,t),\eta(x,y,z,t),\zeta(x,y,z,t),\tau(x,y,z,t))$$
$$+\epsilon u_1(\xi(x,y,z,t),\eta(x,y,z,t),\zeta(x,y,z,t),\tau(x,y,z,t))). \tag{3.52}$$

2 微扰对孤子的影响

与 (1+1) 维 NLSE 情况所不同的是，含微扰项 $-\epsilon u_{tt}$ 的 (2+1) 维 NLSE 的微扰解 (3.52) 的振幅的变化指数不仅与 z 有关，还与一个关于时间 t 的任意函数 h 有关。选取不同的 h 形式，近似解的形式会发生较大的改变。而且，不同的 h 形式也会对近似解中的其他参量产生影响。所以，在 (2+1) 维情况下，微扰项对无微扰方程的解所产生的影响要比 (1+1) 维的情形要复杂得多。

简单地，如取 $h(t)$ 为常数，则近似解 u 的振幅只与 z 有关，并随着 z 的变化而指数增加 ($z>0$) 或衰减 ($z<0$)。若取 $h(t)=t$，根据 (3.39) 式中的情形 1，方程 (3.40) 的零阶解为:

$$u_0(x,y,z,t)=2\sqrt{2\omega}\epsilon te^{-2\epsilon zt}\ \mathrm{sech}[\sqrt{\frac{\omega}{1+c^2}}(\frac{2\epsilon xte^{\epsilon zt}-2c\epsilon yte^{\epsilon zt}}{e^{2\epsilon zt}-1})-\zeta_0]$$
$$\times e^{i(\frac{\epsilon x^2te^{2\epsilon zt}+\epsilon y^2te^{2\epsilon zt}-4\epsilon\omega t}{2e^{2\epsilon zt}-1})}/(e^{2\epsilon zt}-1). \tag{3.53}$$

经过简单的计算会发现，当 $\epsilon \to 0$，解 (3.53) 将退化回 (2+1) 维 NLSE 的准孤子解。由于它的一阶修正更复杂，这里我们就不再详细写出。

(四) 小结

孤子及其微扰问题的研究是近年来非线性领域一个非常活跃，并且硕果累累的一个分支。但是一直以来，在处理高维的和耦合非线性演化方程的微扰问题时，现有的微扰理论都遇到了很大的困难。另一方面，由于高维的和耦合非线性演化方程已经成功地描述了实际问题中的很多非线性现象，所以又一直受到研究者的广泛关注。

这一章中，我们将直接微扰方法成功地应用于含有线性损耗项的耦合非线性薛定谔方程和 (2+1) 维非线性薛定谔方程。通过这种直接微扰方法，我们可以得到包括零阶近似和一阶修正的可靠的近似解。在此基础上，我们还就微扰对孤子的各个参数产生的影响进行了简单分析：在线性损耗的作用下，孤子的振幅随着时间的增加逐渐衰减直至 0，而孤子的传播速度并不发生改变。特别地，耦合非线性薛定谔方程的双孤立波的能量不会因为微扰的作用而发生转移或交换。为进一步证实直接微扰方法的有效性，我们还对微扰的耦合非线性薛定谔方程进行直接模拟。结果显示，在 ϵ 值的相当大的范围内，数值解与解析解吻合得很好。但是，从解析解与数值解的比较中我们也发现了一个问题：孤子的碰撞时刻并不相同，而且碰撞时刻的孤子的振幅符合得也并不是很理想。这是数值模拟过程不够精确还是直接微扰方法在处理多孤子碰撞过程时出现了问题，还有待于进一步研究。

四 总结与展望

对含有修正项的非线性演化方程的求解，目前的主要手段还是停留在数值方法。然而当修正项可以看作小量时，发展有效的微扰方法就成为必要，而且各种不同的微扰方法也是解决实际问题所不可缺少的。非线性薛定谔方程作为现代科学中最重要的也是最普遍的非线性模型之一，关于它的微扰问题的研究也越来越受到物理学家和数学家们的广泛关注。到目前为止，人们也已经提出了很多微扰方法来研究非线性薛定谔方程的微扰问题，包括逆散射微扰方法，直接微扰方法，修正守恒律微扰方法，奇点微扰方法，线性微扰方法，拉格朗日微扰方法等等。最近，楼在前人的基础上发展了非线性薛定谔方程的一种新的直接微扰方法。本学位论文中，我们系统地研究了楼提出的新的直接微扰方法，并将其应用于微扰耦合非线性薛定谔方程和 (2+1) 维非线性薛定谔方程。

较之其他的微扰方法楼的直接微扰方法具有一定的优越性：(1) 完全摆脱了对逆散射方法的依赖。也就是在这种直接微扰方法中，不要求未受微扰影响的非线性薛定谔方程能够用逆散射法精确求解；(2) 思路直接，容易理解和接受；(3) 同时得到各种不同类型的微扰解，包括单孤子，多孤子，周期解等等，而不需要采用不同的微扰方法来分别处理它们的微扰问题，尤其象一直受到人们关注的多孤子微扰问题，楼的直接微扰方法也能很好地处理。(4) 用这种直接微扰方法得到的近似解可以以无微扰的非线性薛定谔方程的任意一个精确解作为它的零阶解，而且其一阶修正可以由它们的无穷多个对称中的任意一个给定。所以，运用这种直接微扰方法得到的近似解比用通常的微扰方法得到的近似解要丰富得多。通过将直接微扰方法运用到一个可积的含修正项的非线性薛定谔方程，我们对它进行了可靠性分析。从近似解与精确解的比较中发现，在相当大的 ϵ 值范围内，近似解与精确解符合得很好。于是在论文的第三章中，我们将直接微扰方法应用到微扰非线性薛定谔方程，并得到了它们的可靠的近似解。楼的直接微扰方法还能够给出孤子参数的解析表达式，且与数值结果符合得非常好。在线性损耗的作用下，孤子的振幅随着时间的增加逐渐衰减直至 0，而孤子的传播速度并不发生改变。特别地，耦合非线性薛定谔方程

的双孤立波的能量不会因为微扰的作用而发生转移或交换。

诚然，本文所做的工作仅仅只是一个开始，还有许多的问题有待进一步的发展和完善：

1. 虽然我们成功地处理了几个具体的含不同微扰的非线性薛定谔方程的例子，但是目前我们还无法将直接微扰方法运用到含其他形式的微扰的非线性薛定谔方程，如 $i\epsilon|u_x|^2u$，$i\epsilon|u|^4u$，$i\epsilon|u|^2u_x$ 等等，其中的难点在于我们无法找到满足相应的相容性条件的解。

2. 至于如何将该直接微扰方法推广到其他的微扰非线性演化方程，如微扰 KdV 方程、sine-Gordon 方程、Burgers 方程，甚至是微扰的离散非线性演化方程等等，这些问题都有待于进一步讨论。

3. 从第三章处理耦合非线性薛定谔方程的微扰问题的过程中我们发现，在双孤子的碰撞时刻，利用直接微扰方法得到的解析解与数值结果出现了明显的差别，是在现有的框架内进一步完善还是寻求新的方法来解决，尚待进一步深入研究。

附　录

分步傅立叶方法

分步傅立叶方法 (Split-step Fourier Method) 最早是在 1973 年开始应用的 [98]，这种方法已经被证明是相同精度下数值求解非线性薛定谔方程最快的方法，部分原因是它采用了快速傅立叶变换算法 (Fast Fourier Transform Algorithm)。由于它比大多数有限差分法见效快，已被广泛地用来处理非线性色散介质地脉冲传输问题的非线性薛定谔方程 [99, 100]。下面我们就分步傅立叶方法作一简单的介绍。

非线性薛定谔方程的基本形式为:

$$iu_t = u_{xx} + 2|u|^2 u. \tag{A.1}$$

其中 u 是复值的未知函数。

设当 $|x| \to \infty$ 时，$|u| \to 0$，则对非线性薛定谔方程 (A.1) 的初值问题有单孤立子的精确解

$$u(x,t) = 2\eta e^{i[2\xi x - 4(\xi^2 - \eta^2)t + \phi_0]}\text{sech}(2\eta x - 8\xi\eta t - x_0) \tag{A.2}$$

其中 ξ, η, ϕ_0, x_0 均为常数。当然，(A.1) 的初值也可以由两个孤立子甚至多个孤立子的精确解给定。

为了叙述的简洁，我们考虑 NLS 方程 (A.1) 的周期初值问题。初始条件和边界条件是

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x)$$

$$u(x+2\pi, t) = u(x,t).$$

将区间 $[0, 2\pi]$ 分为 J 等份，$x_0 = 0$, $x_1 = \triangle x, \cdots, x_j = 2\pi$, $\triangle x = \frac{2\pi}{J}$。

这种方法对方程 (A.1) 分步求解

(1) 首先考虑非线性部分

$$\begin{cases} iu_t^{(I)} = 2|u^{(I)}|^2 u^{(I)}, \\ u^{(I)}|_{t=0} = u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \tag{A.3}$$

它有精确的单波解

$$u^{(I)}(x,t) = u_0(x) \cdot e^{-2i|u_0(x)|^2 \cdot t} \tag{A.4}$$

(2) 再考虑线性部分

$$iu_t^{(II)} = u_{xx}^{(II)}, \tag{A.5}$$

用 Fourier 变换求解，在 Fourier 空间中有解

$$\hat{u}_k^{(II)} = \hat{u}_k^{(II)}(0) e^{ik^2 t}, \tag{A.6}$$

(3) 将 (A.4) 的解 $u^{(I)}(x,t)$ 变换到 Fourier 空间为 $\hat{u}_k^{(I)}(t)$, 以它作为 (A.5) 中的初值

$$\hat{u}_k^{(II)}(t+\Delta t) = \hat{u}_k^{(I)}(t) e^{ik^2 \Delta t},$$

(4) 将 $\hat{u}_k^{(II)}(t+\Delta t)$ 变换回 x 的空间中得到近似解

$$\hat{u}_j(t+\Delta t) = F^{-1}\{\hat{u}_k^{(II)}(t+\Delta t)\} = F^{-1}\{e^{ik^2\Delta t} \cdot F\{u^{(I)}(x_j,t)\}\}, \tag{A.7}$$

这个解能够用 FFT 标准程序，很快求得。

这种方法对时间 t 是二阶截断误差。而对空间 x 的截断误差为 $(\Delta x)^M$，其中 M 取决于解的光滑性。当解无穷次可微时，M 可以取任何正值。

参考文献

[1] 魏诺. 非线性科学基础与应用 [M]. 北京：科学出版社, 2004. 1-2

[2] Zabusky N J and Kruskal M D. Interaction of "Soliton" in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States [J]. Phys. Rew. Lett., 1965, 15: 240-243

[3] Russell J S. Report on Waves [C]. In: John Murry. London, 14th meeting of the British Association Reports. 1844. 311-390

[4] Scott A C, Chu F Y F and McLaughlin D W. The Soliton: A New Concept in Applied Science [J]. IEEE Proc. 1973, 61: 1443-1483

[5] 李振道. 场论与粒子物理学 (上册) [M]. 北京：科学出版社, 1980. 87-91

[6] Zakharov V E and Shabat A B. Exact Theory of Two-dimesional Self-focusing and One-dimensional Self-modulation of Waves in Nonlinear Media [J]. Sov. Phys. JETP, 1972, 34: 62-69

[7] Zakharov V E and Shabat A B. Interaction between Solitons in a Stable Medium [J]. Sov. Phys. JETP, 1973, 37: 823-828

[8] Ryogo Hirota. Exact Envelope-Soliton Solutions of a Nonlinear Wave Equation [J]. J. Math. Phys., 1973, 14: 805-809

[9] Ablowitz M J, Ramani A and Segur H. A Connection between Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type. I [J]. J. Math. Phys., 1980, 21: 715-721

[10] Weiss J, Tabor M and Carnevale G. The Painlevé Property for Partial Differential Equations [J]. J. Math. Phys., 1983, 24: 522-526

[11] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用 (第二版) [M]. 上海：上海科学技术出版社, 2005.

[12] 黄令. 耦合 Burgers 方程的对称性及对称约化 [J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3864-3868

[13] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法 [J]. 物理学报, 1998, 47: 353-362

[14] Wahlquist H D and Estabrook F B. Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-de Vries Equation [J]. Phys. Rev. Lett., 1973, 31: 1386-1390

[15] Kaup D J. A Perturbation Expansion for the Zakharov-Shabat Inverse Scattering Transform [J]. SIAM J. Appl. Math., 1976, 31: 121-125

[16] Karpman V I and Maslov E M. Perturbation Theory for Solitons [J]. Sov. Phys. JETP, 1977, 46: 281-303

[17] Kaup D J and Newell A C. Solitons as Particles, Oscillators, and in Slowly Changing Media: A Singular Perturbation Theory [J]. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1978, 361: 413-446

[18] Maslov E M. Second Order Perturbation Theory for Solitons [J]. Thro. Mat. Fiz., 1980, 42: 362-369

[19] Karpman V I. Soliton Evolution in the Presence of Perturbation [J]. Phys. Scr., 1979, 20: 462-478

[20] Newell A C. In: F. Calogero. Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Spectral Transformation [C]. London: Pitman, 1978. 127

[21] Abdullaev F K and Khabibullaev P K. Dynamics of Solitons in Inhomogeneous Condendes Media(in Russian) [M]. Tashkent: Izdatel'stvo FAN Uzbekskoi SSR, 1986.

[22] Kivshar Y S and Malomed B A. Dynamics of Solitons in Nearly Integrable Systems [J]. Rev. Mod. Phys., 1989, 61: 763-905

[23] Nozaki K. Stochastic Instability of sine-Gordon Solitons [J]. Phys. Rev. Lett., 1982, 49: 1883-1885

[24] Pedersen N F, Samuelsen M R and Welner D. Soliton Annihilation in the Perturbed sine-Gordon System [J]. Phys. Rev. B, 1984, 30: 4057-4059

[25] Malomed B A. Emission from, Quasi-classical Quantization, and Stochastic Decay of sine-Gordon Solitons in External Fields [J]. Physica D, 1987, 27: 113-157

[26] Malomed B A. "Leapfrogging" Solitons in a System of Coupled KdV Equations [J]. Wave Motion, 1987, 9: 401-411

[27] Kivshar Y S and Malomed B A. Interaction of a Fluxon with an Inductance Step in a Long Josephson Junction [J]. J. Appl. Phys., 1989, 65: 879-881

[28] Ott E and Sudan R N. Nonlinear Theory of Ion Acoustic Waves with Landau Damping [J]. Phys. Fluids, 1969, 12: 2388-2394

[29] Pereira N R. Soliton in the Damped Nonlinear Schrodinger Equation [J]. Phys.

Fluids, 1977, 20: 1735-1743

[30] Bergman D J, Ben-Jacob E, Imry Y and Maki K. sine-Gordon Soliton: Particles Obeying Relativistic Dynamics [J]. Phys. Rev. A, 1983, 27: 3345-3348

[31] Christiansen P L and Olsen O H. Propagation of Fluxons on Josephson Lines with Impurities [J]. Wave Motion, 1982, 4: 163-172

[32] Levring O A, Samuelsen M R and Olsen O H. Exact and Numerical Solutions to the Perturbed sine-Gordon Equation [J]. Physica D, 1984, 11: 349-358

[33] Gorshkov K A and Ostrovskii. Interactions of Solitons in Nonintegrable Systems: Direct Perturbation Method and Applications [J]. Physica D, 1981, 3: 428-438

[34] Gorshkov K A, Ostrovskii L A and Pelinovsky E N. Some Problems of Asymptotic Theory of Nonlinear Waves [J]. Proc. IEEE., 1974, 82: 1511-1517

[35] Fogel M B, Trullinger S E, Bishop A R and Krumhansl A. Classical Particlelike Behaviour of sine-Gordon Solitons in Scattering Potentials and Applied Fields [J]. Phys. Rev. Lett., 1976, 36: 1411-1414

[36] Keener J P and McLaughlin D W. Solitons under Perturbations [J]. Phys. Rev. A, 1977, 16: 777-790

[37] McLaughlin D W and Scott A C. Perturbation Analysis of Fluxon Dynamics [J]. Phys. Rev. A, 1978, 18: 1652-1680

[38] Mineev M B and Shmidt V V. Radiation from a Vortex in a Long Josephson Junction Located in an Alternating Electromagnetic Field [J]. Sov. Phys. JETP, 1980, 52: 453-460

[39] Ichikawa Y H. Topics on Solitons in Plasmas [J]. Phys. Scr., 1979, 20: 296-305

[40] Flesch R J and Trullinger S E. Green's Function for Nonlinear Klein-Gordon Kink Perturbation Theory [J]. J. Math. Phys., 1987, 28: 1619-1631

[41] Yan J R, Tang Y and Zhou G H. Direct Approach to the Soliton Perturbation of the Nonlinear Schröndinger Equation and the sine-Gordon Equation [J]. Phys. Rev. E, 1998, 58: 1064-1073

[42] Yan J R and Tang Y. Direct Approach to the Study of Soliton Perturbations [J]. Phys. Rev. E, 1996, 54: 6816-6824

[43] Kaup D J. Thermal Corrections to Overdamped Soliton Motion [J]. Phys. Rev. B, 1983, 27: 6787-6795

[44] Huang G X, Velarde M G and Makarov V A. Dark Solitons and Their Head-on Collision in Bose-Einstein Condenstates [J]. Phys. Rev. A, 2000, 64: 013617-013627

[45] Huang G X, Deng L and Hang C. Davey-Stewartson Description of Two-dimensional Nonlinear Excitations in Bose-Einstein Condenstates [J]. Phys. Rev. E, 2005, 72: 036621-036628

[46] Kaup D J. Second-order Perturbation for Solitons in Optical Fibers [J]. Phys. Rev. A, 1991, 44: 4582-4590

[47] Fogel M B, Trullinger S E, Bishop A R and Krumhansl A. Dynamics of sine-Gordon Solitons in the Presence of Pertuabations [J]. Phys. Rev. B, 1977, 15: 1578-1592

[48] Toskiya IWAI. Kink Dynamics in a One-Dimensional Non-Conserved TDGL System with a Quenched Impurity [J].
J. Phys. Soc. Jpn., 1995, 64: 2828-2836

[49] Yajma N. Application of Hirota's Method to a Perturbed System [J]. J. Phys. Soc. Jpn., 1982, 51: 1298-1302

[50] Lou S Y. A Direct Perturbation Method: Nonlinear Schrödinger Equation with Loss [J]. Chin. Phys. Lett., 1999, 16(9): 659-661

[51] Roy S M and Singh V. Generalized Coherent States and the Uncertainty Principle [J]. Phys. Rev. D, 1982, 25: 003413-003416

[52] Lieb E H. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum [J]. Phys. Rev., 1963, 130: 1616-1624

[53] Lieb E H and Liniger W. Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State [J]. Phys. Rev., 1963, 130: 1605-1616

[54] Sakuma T and Kawanami Y. Theory of the surface acoustic soliton. II. Semiconducting solid [J]. Phys. Rev. B, 1984, 29: 880-888

[55] Ichikawa Y H, Imamura T and Taniuti T. Nonlinear Wave Modulation in Collisionless Plasmas [J]. J. Phys. Soc. Jap., 1972, 33: 189-197

[56] 王德焴, 吴德金, 黄光力. 空间等离子体中的孤波 [M]. 上海：上海科技教育出版社, 2000. 15-20

[57] Asano N, Taniuti T and Yajima N. Perturbation Method for a Nonlinear Wave Modulation. II [J]. J. Math. Phys., 1968, 10: 2020-2024

[58] Abdullaev F, Darmanyan S and Khabibullaev P. Optical Solitons[M]. Germany: Springer-Verlag, 1993.

[59] Chiao R Y, Garmire E and Townes C H. Self-Trapping of Optical Beams [J]. Phys. Rev. Lett., 1964, 13: 479 - 482

[60] Mollenauer L F and Stolen R H. The Soliton Laser [J]. Opt. Lett., 1984, 9: 13-15

[61] Haus H and Islam M. Theory of the Soliton Laser [J]. IEEE J. Quantum Electron, 1985, 21: 1172-1188

[62] Narayanamurti V and Varma C M. Nonlinear Propagation of Heat Pulses in Solids [J]. Phys. Rev. Lett., 1970, 25: 1105-1108

[63] D'Evelyn M and Morales G. Properties of Large Amplitude Langmuir Solitons [J]. Phys. Fluids, 1978, 21: 1997-2008

[64] Yuen H C and Lake B M. Nonlinear Deep Water Waves: Theory and Experiment [J]. Phys. Fluids, 1975, 18: 956-960

[65] Corones J. Solitons as Nonlinear Magnons [J]. Phys. Rev. B, 1977, 16: 1763-1764

[66] Lakshmanan M. Continuum Spin System as an Exactly Solvable Dynamical System [J]. Phys. Lett. A, 1977, 61: 53-54

[67] Davydov A S. Solitons in Molecular Systems [J]. Phys. Scr., 1979, 20: 387-94

[68] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D *et al.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation [J]. Phys. Rev. Lett., 1967, 19: 1095-1097

[69] 黄念宁. 孤子理论和微扰方法 [M]. 上海：上海科技教育出版社, 1996. 61-65; 215-217

[70] 陈登远. 孤子引论 [M]. 北京：科学出版社, 2006. 32-35

[71] Keener J P and McLaughlin D W. A Green's Function for a Linear Equation Associated with Solitons [J]. J. Math. Phys., 1977, 18: 2008-2013

[72] Herman R L. A Direct Approach to Studying Soliton Perturbation [J]. J. Phys.

A, 1990, 23: 2327-2364

[73] Herman R L. The Stochastic, Damped KdV Equation [J]. J. Phys. A, 1990, 23: 1063-1084

[74] 刘颂豪, 赫光生. 强光光学及其应用 [M]. 广东：广东科技出版社, 1995. 276-277

[75] Lou S Y and Chen W Z. Inverse Recursion Operator of the AKNS Hierarchy [J]. Phys. Lett. A, 1993, 179: 271-274

[76] 程雪苹, 林机, 王志平. 耦合非线性薛定谔方程的近似求解 [J]. 物理学报 (已录用)

[77] 石顺祥, 陈国夫, 赵卫等. 非线性光学 [M]. 西安：西安电子科技大学出版社, 2003. 419-420

[78] Cheng X P, Lin J and Ye L J. Asymptotical Solutions of the Coupled Nonlinear Schrödinger Equations with Perturbations [J]. unpublished.

[79] Cheng X P and Lin J. Asymptotical Solutions of Perturbed Nonlinear Schrödinger Equations [J]. unpublished.

[80] 肖毅, 郭旗. 平板波导中正交极化的双光束的“互陷”传输 [J]. 物理学报, 2005, 54(11)：5201-5209

[81] 江金环, 李子平. 基于全息聚焦机理空间光孤子的相互作用势函数 [J]. 物理学报, 2004, 53(9)：2991-2994

[82] 闫循领, 董瑞新, 王伯运. α 螺旋蛋白质螺旋线模型的耦合孤立子 [J]. 物理学报, 1999, 48(4)：751-756

[83] Bashkin E P and Vagov A V. Instability and Stratification of a Two-component Bose-Einstein Condensate in a Trapped Ultracold Gas [J]. Phys. Rev. B, 1997, 56: 6207-6212

[84] 王冠芳，傅立斌等. 双势阱玻色 - 爱因斯坦凝聚体系的自俘获现象及其周期调制效应 [J]. 物理学报, 2005, 54(11)：5004-5013

[85] Manakov S V. On the Theory of Two-dimentional Stationary Self-focusiing of Electromagnetic Waves [J]. Sov. Phys. JETP, 1974, 38：248-253

[86] Zakharov V E and Schulman E I. To the Integrability of the System of Two Coupled Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Physica D, 1982, 42：270-274

[87] Sahadevan R, Tamizhmani K M and Lakshmanan M. Painlevé Analysis and In-

tegrability of Coupled Nonlinear Schrödinger equations [J]. J. Phys. A, 1986, 19: 1783-1791

[88] Radhakrishnan R, Lakshmanan M and Hietarinta J. Inelastic Collision and Switching of Coupled Bright Slitons in Optical Fibers [J]. Phys. Rev. E, 1997, 56: 2213-2216

[89] Kanna T and Lakshmanan M. Exact Soliton Solutions of Coupled Nonlinear Schrödinger Equations: Shape-changing Collisions, Logic Gates, and Partially Coherent Solitons [J]. Phys. Rev. E, 2003, 67: 046617-046641

[90] Gao P and Guo B L. Homoclinic Orbits for the Coupled Nonlinear Schrödinger System and Long-Short Wave Equation [J]. Phys. Lett. A, 2005, 340: 209-216

[91] Ruan H Y and Chen Y X. Symmetries and Dromion Solution of a (2+1)-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Chin. Phys., 1999, 8(4): 241-251

[92] Kanna T, Tsoy E N and Akhmediev N. On the Solution of Multicomponent Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Phys. Lett. A, 2004, 330: 224-229

[93] Radhakrishnan R, Sahadevan R and Lakshmanan M. Integrability and Singularity Structure of Coupled Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 1995, 5: 2315-2327

[94] Fibich G and Papanicolaou G. Self-Focusing in the Perturbed and Unperturbed Nonlinear Schrödinger Equation in Critical Dimension [J]. SIAM J. Appl. Maths., 1999, 60: 183-240(and thereins)

[95] 庞小峰. 非线性量子力学理论 [M]. 重庆：重庆出版社, 1994. 148

[96] Rasmussen J and Rypdal K. Blow-up in Nonlinear Schrödinger Equations-I A General Review [J]. Phys. Scripta, 1986, 33: 481-497

[97] 阮航宇, 陈一新. (2+1) 维非线性薛定谔方程的环孤子，dromion，呼吸子和瞬子 [J]. 物理学报, 2001, 50(4): 586-592

[98] Ruan H Y and Chen Y X. Symmetries and Dromion Solution of a (2+1)-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Acta Phys. Sin., 1999, 8(4): 241-251

[99] Fibich G, MalkinV M and Papanicolaou G. Beam Self-Focusing in the Presence

of a Small Normal Time Dispersion [J]. Phys. Rev. A, 1995, 52: 4218-4228

[100] Fibich G and Papanicolaou G. A Modulation Method for Self-Focusing in the Perturbed Critical Nonlinear Schrödinger Equation [J]. Phys. Lett. A, 1998, 239: 167-173

[101] Hasegawa A and Tappert F. Transmission of Stationary Nonlinear Optical Pulses in Dispersive Dielectric Fibers. I. Anomalous Dispersion[J]. Appl. Phys. Lett., 1973, 23: 142-144

[102] Krokel D, Halas N J, Giuliani G and Grischkowsky D. Dark-Pulse Propagation in Optical Fibers [J]. Phys. Rev. Lett., 1988, 60: 29-32

[103] Agrawal G P. Optical Pulse Propagation in Doped Fiber Amplifiers [J]. Phys. Rev. A, 1991, 44: 7493-7501

攻读硕士期间发表的学术论文

1. Lin Ji, Cheng Xueping, Ye Lijun. Soliton and Periodic Travelling Wave Solutions for Quadratic Nonlinear Media. Chin. Phys. Lett. 23(2006)147.

2. 程雪苹, 林机, 王志平. 微扰的耦合非线性薛定谔方程的近似求解 (已录用)

3. Cheng Xueping, Lin Ji, Ye Lijun. Asymptotical Solutions of Coupled Perturbed Nonlinear Schrodinger Equations with Perturbations.(已投稿)

4. Cheng Xueping, Ye Lijun, Lin Ji. Approximate Solutions of Perturbed Nonlinear Schrodinger Equations.(已投稿)

致 谢

本论文是在导师林机教授的精心指导下完成的，导师严谨的治学作风，实事求是的科学态度指引我在科研道路上不断前进，对我的学习、生活产生了深刻的影响并且让我受益匪浅。在攻读硕士期间，导师给我创造了优良的科研环境，提供了各种优越的学习条件，并在生活上给予我很大的支持和关心。导师在两年半的时间里不仅传授给我知识，更重要的是教会了我从事科学研究的方法，培养了我的科研能力，她对我的论文的选题、写作和修改不断地进行指点和帮助。在此论文完成之际，我谨向两年半来辛勤培育和关怀我的导师及其家人表示衷心的感谢，祝他们身体健康，事事顺利！

衷心感谢浙江师范大学理论物理研究所的童国平教授、蒋永进副教授、李画眉教授、许友生教授、郭海副教授、许学军教授、董亮伟副教授和师姐叶丽军，以及上海交通大学的楼森岳教授和唐晓艳老师的学术讨论和帮助。

衷心感谢和我一起从事研究的硕士赵丽娜、王悦悦、严微微、蒋仁杰、黄秋萍、殷豪、李晓伟、吴雷、石小明和徐莹等亲朋好友们，对我在学习上和生活上的诸多的关心、帮助和讨论！

衷心感谢室友章林芳在生活上的帮助！

衷心感谢我的父母、姐姐、弟弟和其他所有家人对我的关心、支持、理解和鼓励！

衷心感谢在天国里的我的外公外婆！

最后再次感谢所有关心爱护我的每一位老师和同学，祝大家身体健康，工作顺利！

程雪苹

2006.12

直接微扰方法和非线性薛定谔方程族的近似解

作者： 程雪苹
学位授予单位： 浙江师范大学